Su una possibile nuova dimostrazione del teorema di Brouwer

Biagio Ricceri

Non c' è l'ombra del dubbio che uno dei più importanti risultati dell'Analisi matematica è il teorema di punto fisso di Schauder, stabilito nel 1930. Eccone l'enunciato:

TEOREMA A. - *Sia E uno spazio normato e sia X un sottoinsieme di E non vuoto compatto e convesso. Allora, ogni funzione continua $f : X \to X$ ha un punto fisso.*

L'eccezionale importanza di questo risultato risiede nella sua fruttuosissima applicabilità. In effetti, migliaia di risultati di esistenza per equazioni di varia natura (differenziali, integrali, integro-differenziali, funzionali...) sono stati ottenuti applicando come strumento principale, per l'appunto, il teorema di Schauder.

Nel caso in cui E sia $\mathbf{R}^n$, il Teorema A venne provato dal matematico olandese Brouwer nel 1910.

La dimostrazione del teorema di Schauder è abbastanza semplice: si adopera il teorema di Brouwer all'interno di un naturale processo di approssimazione.

Tutto, allora, è ricondotto alla dimostrazione del teorema di Brouwer.

Nel caso $n = 1$, il teorema di Brouwer si riduce ad un classico esercizio di Analisi I che si assegna dopo aver dimostrato il teorema di esistenza degli zeri.

Quando $n \geq 2$, in special modo quando $n \geq 3$, il quadro dimostrativo cambia del tutto.

In realtà, nel corso degli oltre cento anni dalla versione originale, sono apparse svariate dimostrazioni che, pur utilizzando approcci e tecniche del tutto differenti, sembrano essere accomunate da una sostanziale non elementarità.

In questo seminario, propongo la prospettiva di un'ulteriore nuova dimostrazione del teorema di Brouwer interamente basata sul concetto topologico di connessione.