Un'introduzione amichevole agli spazi spettrali

Ideali primi e spettri primi di anelli hanno un ruolo centrale in algebra commutativa e geometria algebrica, essendo uno dei fondamenti della teoria degli schemi, per esempio. Proprietà topologiche e di ordine di spazi di ideali primi sono risultate molto utili nel caratterizzare alcune classi di anelli. Dal punto di vista della topologia generale, negli anni 60 del secolo scorso si è iniziato a ricercare quelle proprietà devono essere soddisfatte da uno spazio topologico affinché esso sia omeomorfo allo spettro primo di un anello (commutativo con 1), munito della topologia di Zariski. Questo è stato il tema centrale della tesi di dottorato di M. Hochster, nella quale egli ha provato che siffatti spazi topologici - detti anche *spazi spettrali* - sono precisamente gli spazi X che soddisfano i seguenti assiomi:

(1) X è compatto;
(2) X ha una base di aperti compatti che è chiusa rispetto alle intersezioni finite;
(3) X è *sobrio*, i.e., ogni chiuso irriducibile di X ha un unico punto generico.

Mentre per alcuni spazi spettrali - come gli spazi di Riemann-Zariski (si veda [2]) - una classe di anelli che realizza il teorema di Hochster è stata determinata esplicitamente, per molti altri spazi che sono oggetto di studio in algebra commutativa non è semplice stabilire se essi sono spettrali perché, in particolare, non è banale verificare la condizione (3) della caratterizzazione di Hochster.

Uno degli obiettivi di questo talk è presentare alcune nuove recenti prospettive nello studio degli spazi spettrali, ed in particolare un criterio (si veda [1]), basato sull'uso degli ultrafiltri, per stabilire se uno spazio è spettrale. Alcuni recenti nuovi esempi saranno discussi.

Riferimenti bibliografici

[1] C. A. Finocchiaro, Spectral spaces and ultrafilters. *Comm. Algebra* **42** (2014), no. 4, 1496–1508.

[2] C. A. Finocchiaro, M. Fontana, K. A. Loper, The constructible topology on spaces of valuation domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013), no. 12, 6199–6216.