Graduato associato ad una valutazione

Partendo da un dominio di valutazione $(\mathcal{O}_v, \mathfrak{m}_v)$ e considerando un suo sottoanello locale $(R, \mathfrak{m})$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_v \cap R$, si analizzerà l'anello graduato associato ad R rispetto la valutazione v. Vale a dire, indicando con $\mathcal{P}_\gamma \coloneqq \{x \in R : \ v(x) \geq \gamma\}$ e con $\mathcal{P}_\gamma^+ \coloneqq \{x \in R : \ v(x) > \gamma\}$, si studierà l'anello $\mathrm{gr}_v(R) \coloneqq \bigoplus_{\gamma \in v(R)} \mathcal{P}_\gamma / \mathcal{P}_\gamma^+$ e si mostrerà che nel caso in cui $Kv \coloneqq \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v = R/\mathfrak{m}$ si ottiene il seguente isomorfismo di anelli graduati :

$$\mathrm{gr}_v(R) \cong Kv[t^{v(R)}]$$

dove $Kv[t^{v(R)}] \coloneqq \{\sum_{i=0}^n a_i t^{\gamma_i} : \ n \in \mathbb{N}, a_i \in Kv, \gamma_i \in v(R)\}$ e il prodotto in questo anello "dei polinomi" non è quello standard ma è dato da un *twisting* (cioè una moltiplicazione in cui nel prodotto fra due monomi oltre ai classici fattori ne comparirà un altro detto termine di *twisting*). Si proseguirà con la presentazione di alcuni casi in cui tale isomorfismo si ha con il prodotto *standard*, in particolare verranno trattate le seguenti possibilità :

Teorema 0.1. *Se il gruppo dei valori di $\mathcal{O}_v$ è libero o Kv è chiuso per radicali allora esiste un isomorfismo con il prodotto standard.*

Infine si costruirà un esempio in cui non esiste un isomorfismo con il prodotto standard.