La Meccanica Celeste: un complesso intreccio di teoria, modelli e applicazioni spaziali

Alessandra Celletti

Dipartimento di Matematica
Universitá di Roma Tor Vergata

16 Novembre 2019

Outline

1. Meccanica Celeste

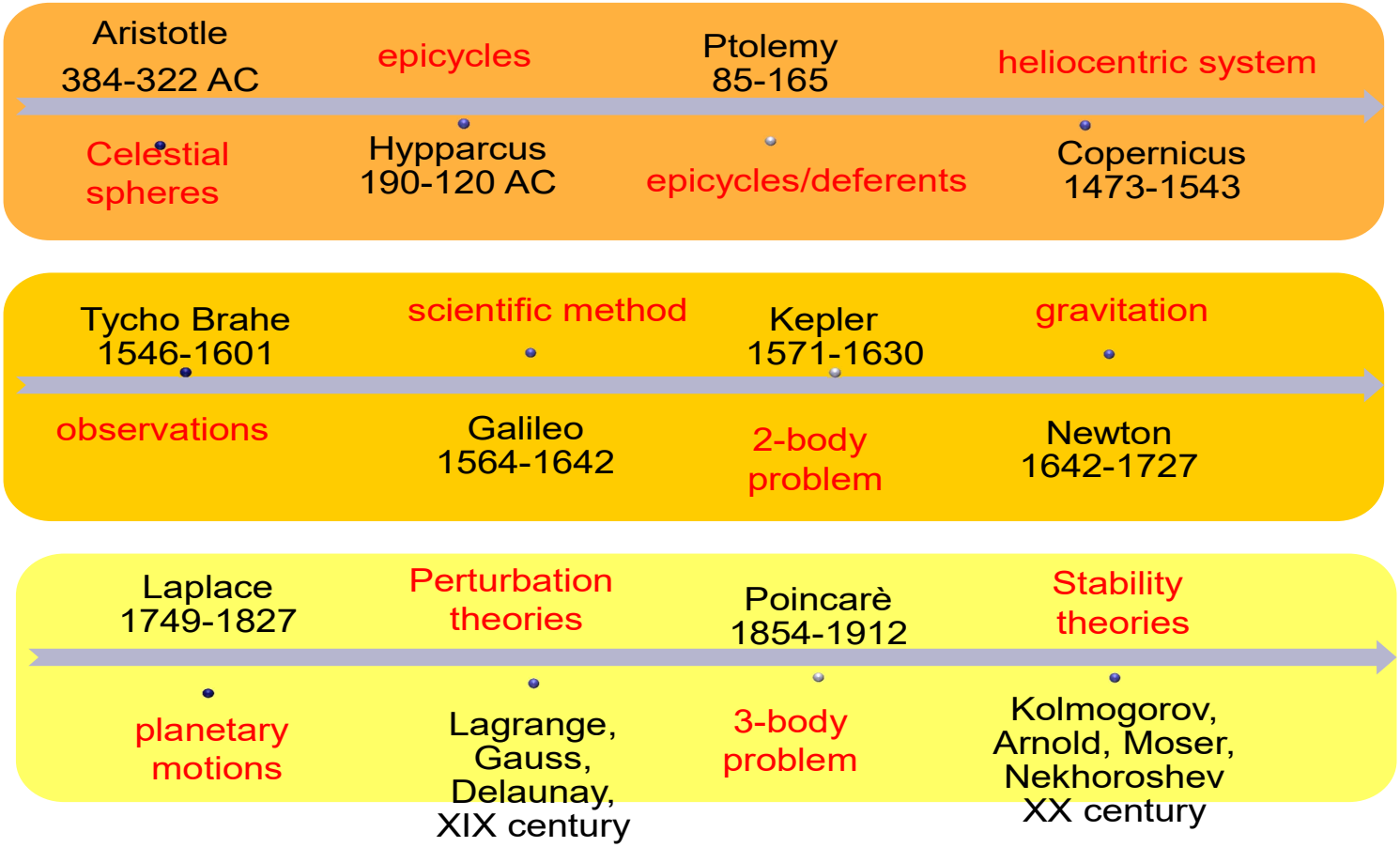
2. Teorie matematiche

3. Applicazioni KAM alla Meccanica Celeste

4. Missioni spaziali

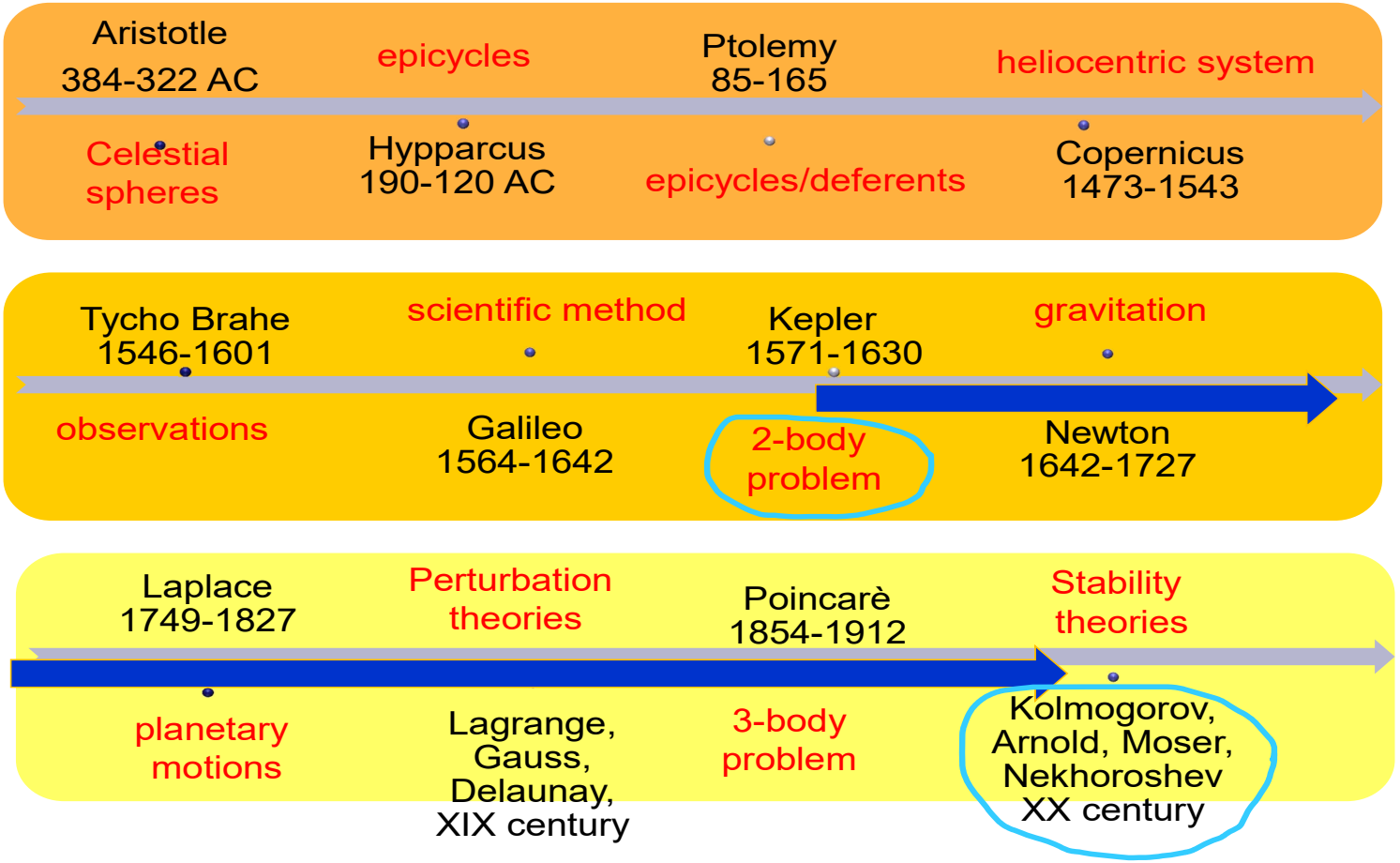
Meccanica Celeste

• La Meccanica Celeste studia la dinamica di oggetti naturali e artificiali del sistema solare.



Meccanica Celeste

• La Meccanica Celeste studia la dinamica di oggetti naturali e artificiali del sistema solare.



Modelli orbitali e rotazionali

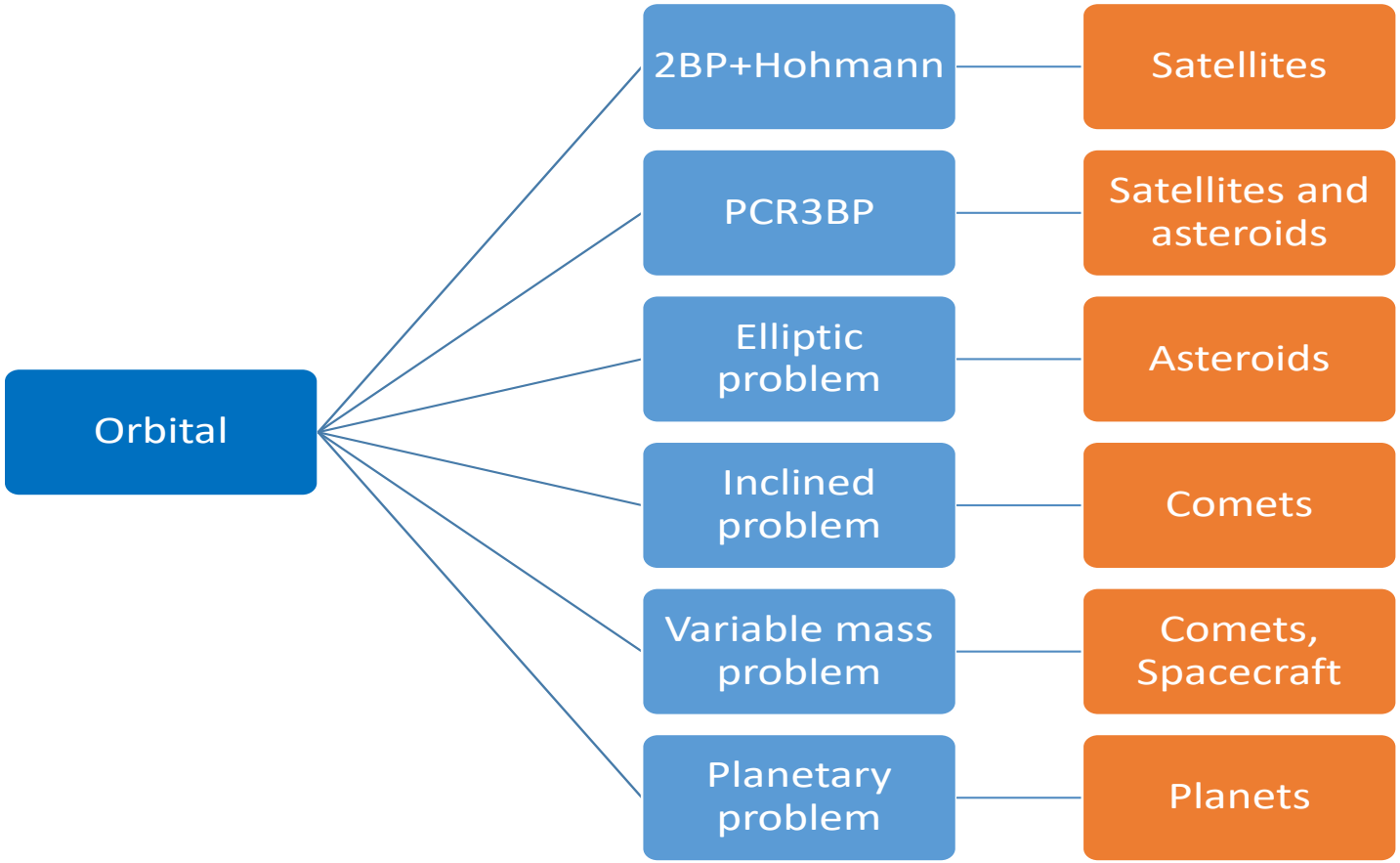
- Modelli: orbitali, rotazionali, orbitali+rotazionali

- Requisiti:

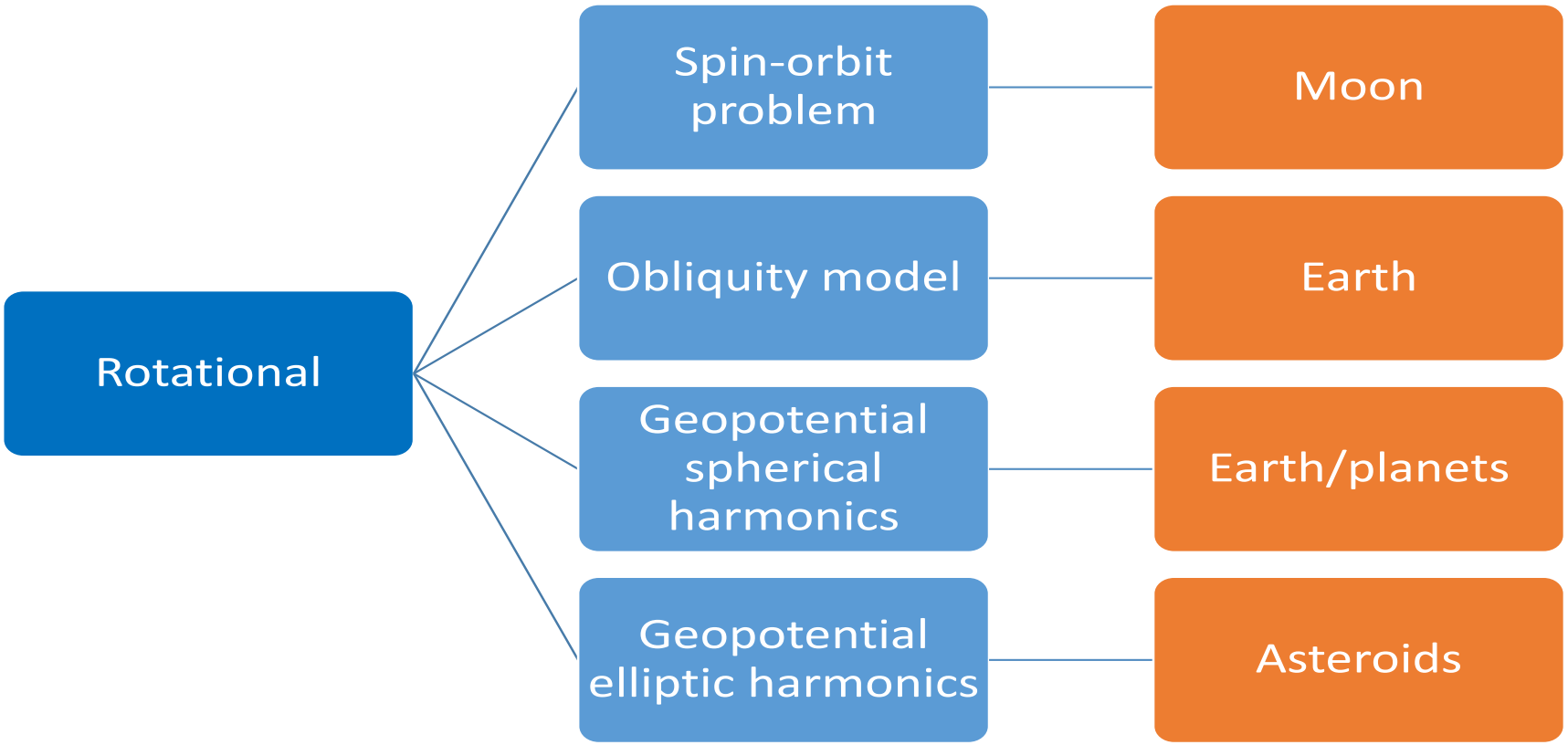
- abbastanza semplici da consentire l'applicazione di teorie matematiche

- abbastanza accurati da consentire significative applicazioni alla dinamica di oggetti celesti naturali e artificiali.

Modelli orbitali e rotazionali



Modelli orbitali e rotazionali



Meccanica Celeste

- SCOPO

- Dinamica regolare, caotica, stabilitá, evoluzione a lungo-termine
- Moti periodici, quasi-periodici, equilibri, risonanze (moto medio, secolari, ecc.), risonanze multiple
- Differenti tipi di orbite: halo, Lissajous, etc.

Meccanica Celeste

• SCOPO

- Dinamica regolare, caotica, stabilitá, evoluzione a lungo-termine
- Moti periodici, quasi-periodici, equilibri, risonanze (moto medio, secolari, ecc.), risonanze multiple
- Differenti tipi di orbite: halo, Lissajous, etc.

• CARATTERISTICHE

- Differenti numeri di gradi di libertá
- Degeneri o non-degeneri
- Conservativi o dissipativi (maree, effetto Poynting-Robertson, Stokes drag, effetto Yarkowski/YORP, sloshing, attrito atmosferico, ecc.)

Meccanica Celeste

• SCOPO
- Dinamica regolare, caotica, stabilitá, evoluzione a lungo-termine
- Moti periodici, quasi-periodici, equilibri, risonanze (moto medio, secolari, ecc.), risonanze multiple
- Differenti tipi di orbite: halo, Lissajous, etc.

• CARATTERISTICHE
- Differenti numeri di gradi di libertá
- Degeneri o non-degeneri
- Conservativi o dissipativi (maree, effetto Poynting-Robertson, Stokes drag, effetto Yarkowski/YORP, sloshing, attrito atmosferico, ecc.)

• TECNICHE
- Metodi analitici: teoria delle perturbazioni, teoria KAM, stime esponenziali, metodi variazionali, teoria delle biforcazioni, controllo ottimale, invarianti adiabatici, dimostrazioni computer-assisted, ecc.
- Metodi numerici: integrazioni numeriche, indicatori di caos, calcolo di orbite periodiche, ecc.
- Metodi semi-analitici: forme normali + integratori numerici.

Outline

1. Meccanica Celeste

2. Teorie matematiche

3. Applicazioni KAM alla Meccanica Celeste

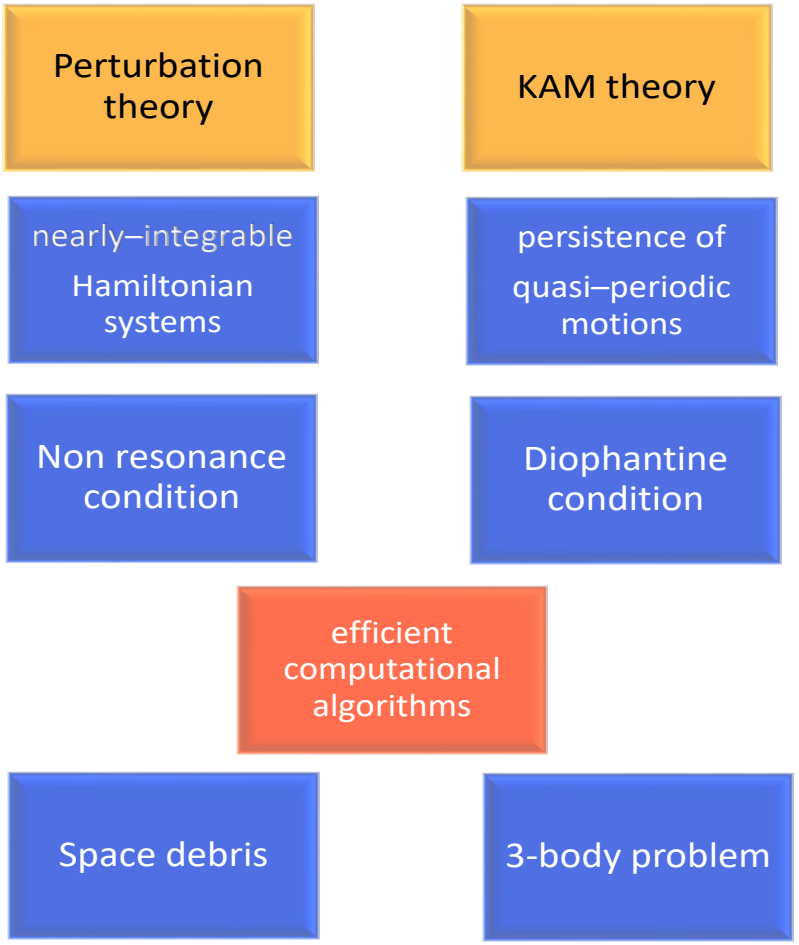
4. Missioni spaziali

Teoria delle perturbazioni vs. Teoria KAM

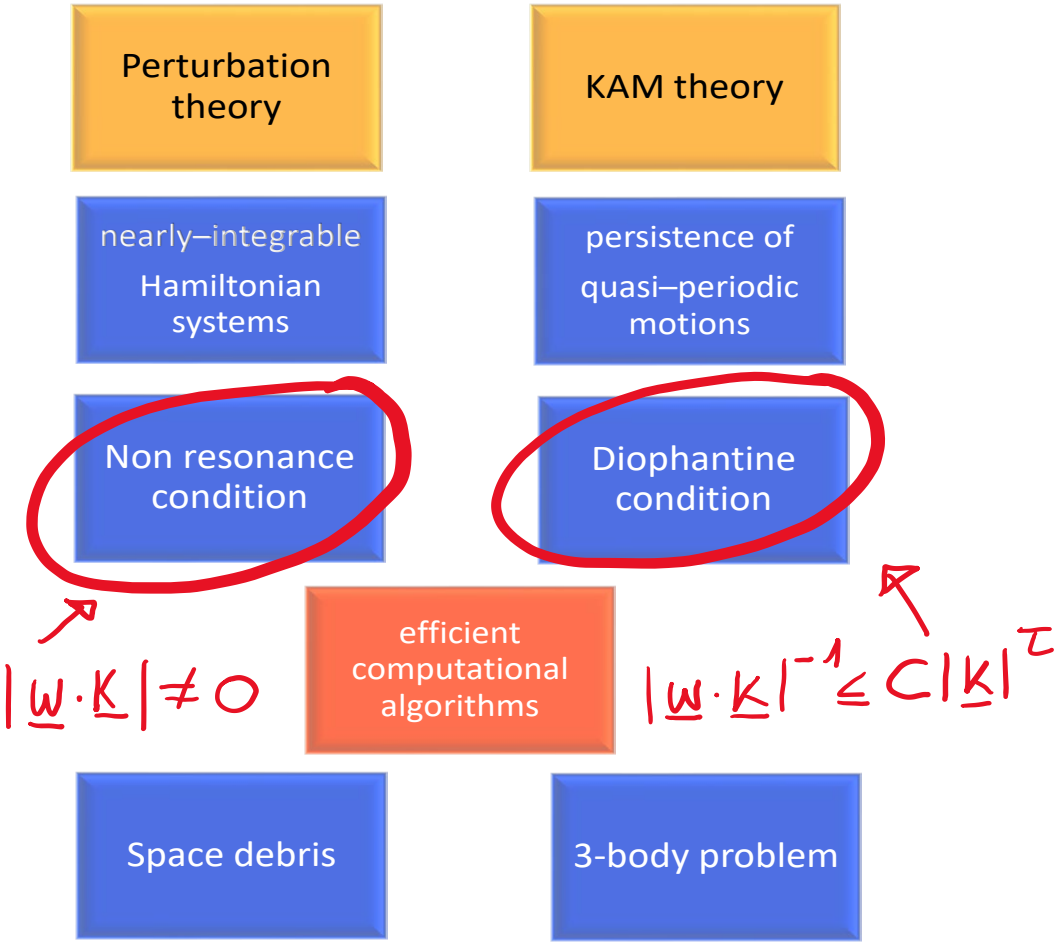
Teoria delle perturbazioni: sistemi Hamiltoniani quasi-integrabili, e.g. problema dei 3-corpi (Sole-asteroide-Giove), basata sulla costruzione di una trasformazione canonica per avere una soluzione approssimata. La convergenza di un numero indefinito di iterazioni é ostacolata dal problema dei *piccoli divisori*.

Teoria di Kolmogorov-Arnold-Moser: riguarda la persistenza di moti quasi–periodici sotto piccole perturbazioni di un sistema integrabile. Originata da A.N. Kolmogorov in 1954, V.I. Arnold (1963) usó un metodo differente e generalizzó a sistemi Hamiltoniani con degenerazione, mentre J.K. Moser (1962) trattó il caso finito-differenziabile.

Teoria delle perturbazioni vs. Teoria KAM



Teoria delle perturbazioni vs. Teoria KAM



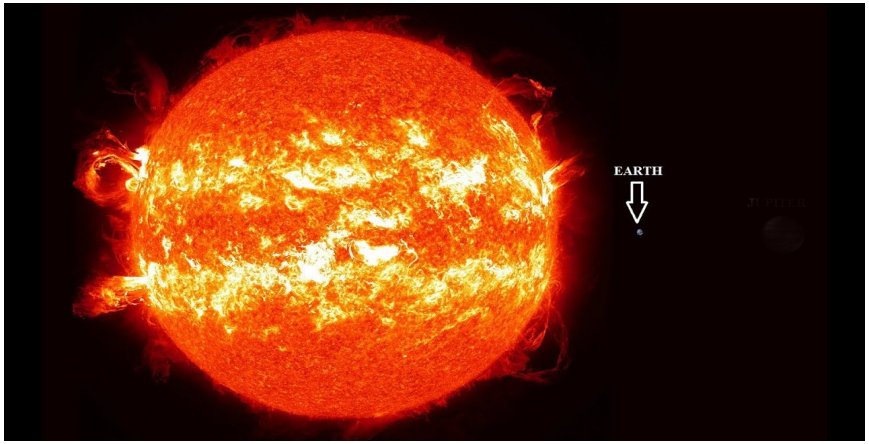
Problema dei 2-corpi

• Problema dei 2-corpi, e.g. Sole-Terra, é governato dalle leggi di Keplero, secondo cui un pianeta si muove attorno al Sole su un'ellisse con il Sole in un fuoco $\Rightarrow$ problema integrabile $\Rightarrow$ formulazione Hamiltoniana in coordinate azione-angolo:

$$\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) \ , \qquad \underline{J} \in \mathbb{R}^n \ , \ \ \underline{\varphi} \in \mathbb{T}^n \ ,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{\underline{J}} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} = -\dfrac{\partial Z(\underline{J})}{\partial \underline{\varphi}} = 0 & \Rightarrow \qquad \underline{J} = \underline{J}_0 \\ \dot{\underline{\varphi}} = \dfrac{\partial \mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{J}} = \dfrac{\partial Z(\underline{J})}{\partial \underline{J}} \equiv \underline{\omega}(\underline{J}) & \Rightarrow \qquad \underline{\varphi} = \underline{\omega}(\underline{J}_0)t + \underline{\varphi}_0 \ . \end{cases}$$



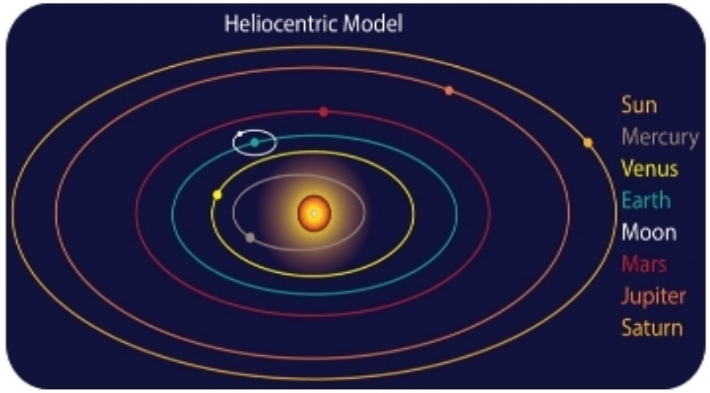
Problema dei 2-corpi

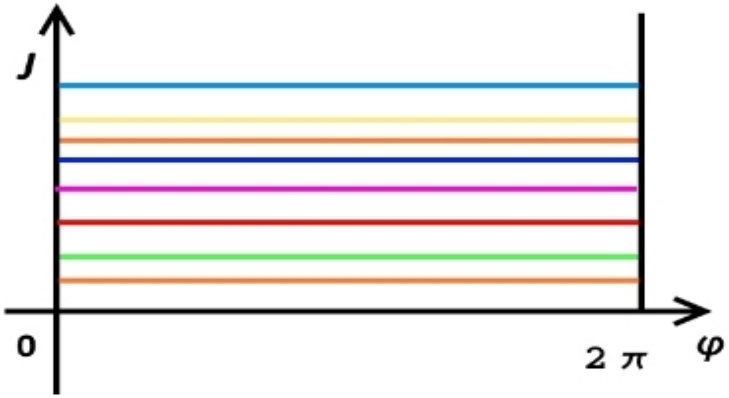
• Problema dei 2-corpi, e.g. Sole-Terra, é governato dalle leggi di Keplero, secondo cui un pianeta si muove attorno al Sole su un'ellisse con il Sole in un fuoco $\Rightarrow$ problema integrabile $\Rightarrow$ formulazione Hamiltoniana in coordinate azione-angolo:

$$\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) \ , \qquad \underline{J} \in \mathbb{R}^n \ , \ \ \underline{\varphi} \in \mathbb{T}^n \ ,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{\underline{J}} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} = -\dfrac{\partial Z(\underline{J})}{\partial \underline{\varphi}} = 0 & \Rightarrow \qquad \underline{J} = \underline{J}_0 \\ \dot{\underline{\varphi}} = \dfrac{\partial \mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{J}} = \dfrac{\partial Z(\underline{J})}{\partial \underline{J}} \equiv \underline{\omega}(\underline{J}) & \Rightarrow \qquad \underline{\varphi} = \underline{\omega}(\underline{J}_0)t + \underline{\varphi}_0 \ . \end{cases}$$

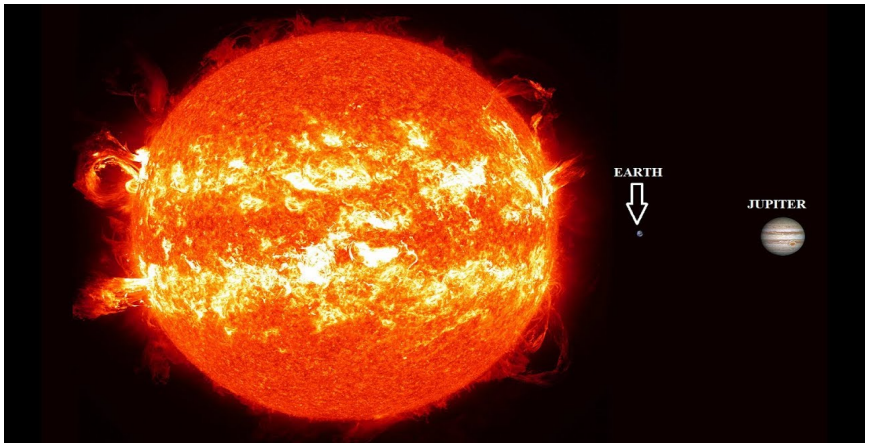




Problema dei 3-corpi

• Problema dei 3-corpi, e.g. Sole-Terra-Giove, é governato da un sistema quasi-integrabile:

$$\mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi}) = \underbrace{Z(\underline{J})}_{\text{Sole-Terra}} + \varepsilon \underbrace{R(\underline{J},\underline{\varphi})}_{\text{Terra-Giove}} , \qquad \varepsilon = \frac{m_{Giove}}{m_{Sole}} \simeq 10^{-3}$$



Problema dei 3-corpi

• Problema dei 3-corpi, e.g. Sole-Terra-Giove, é governato da un sistema quasi-integrabile:

$$\mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi}) = \underbrace{Z(\underline{J})}_{\text{Sole-Terra}} + \varepsilon \underbrace{R(\underline{J},\underline{\varphi})}_{\text{Terra-Giove}} , \qquad \varepsilon = \frac{m_{Giove}}{m_{Sole}} \simeq 10^{-3}$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{J}} &= -\varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} \\ \dot{\underline{\varphi}} &= \underline{\omega}(\underline{J}) + \varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{J}} \end{aligned}$$

Problema dei 3-corpi

• Problema dei 3-corpi, e.g. Sole-Terra-Giove, é governato da un sistema quasi-integrabile:

$$\mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi}) = \underbrace{Z(\underline{J})}_{\text{Sole-Terra}} + \varepsilon \underbrace{R(\underline{J},\underline{\varphi})}_{\text{Terra-Giove}} , \qquad \varepsilon = \frac{m_{Giove}}{m_{Sole}} \simeq 10^{-3}$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{J}} &= -\varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} \\ \dot{\underline{\varphi}} &= \underline{\omega}(\underline{J}) + \varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{J}} \end{aligned}$$

QUALE E' LA SOLUZIONE?

Problema dei 3-corpi

• Problema dei 3-corpi, e.g. Sole-Terra-Giove, é governato da un sistema quasi-integrabile:

$$\mathcal{H}(\underline{J},\underline{\varphi}) = \underbrace{Z(\underline{J})}_{\text{Sole-Terra}} + \varepsilon \underbrace{R(\underline{J},\underline{\varphi})}_{\text{Terra-Giove}} , \qquad \varepsilon = \frac{m_{Giove}}{m_{Sole}} \simeq 10^{-3}$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{J}} &= -\varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} \\ \dot{\underline{\varphi}} &= \underline{\omega}(\underline{J}) + \varepsilon \frac{\partial R(\underline{J},\underline{\varphi})}{\partial \underline{J}} \end{aligned}$$

QUALE E' LA SOLUZIONE?
TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

Teoria classica delle perturbazioni

- Soluzione approssimata: rimuovere la perturbazione a ordini elevati in ε.

Teorema

Sia $\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) + \varepsilon R(\underline{J}, \underline{\varphi})$ con $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \in V \times \mathbb{T}^n$ per $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto:

- ▶ R analitica e trigonometrica (N coefficienti di Fourier) su $V \times \mathbb{T}^n$;
- ▶ frequenza non-risonante per ogni $\underline{J}_0 \in V$:

$$|\underline{\omega}(\underline{J}_0) \cdot \underline{k}| > 0 \quad \text{for all } \; 0 < |\underline{k}| \leq N \, .$$

Allora, esistono $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ e per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ esiste una trasformazione canonica $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \to (\underline{J}', \underline{\varphi}')$ definita in $S_{\frac{\rho_0}{2}}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n \subset V \times \mathbb{T}^n$ e a valori in $S_{\rho_0}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n$, che trasforma $\mathcal{H}$ in

$$\mathcal{H}'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \; = \; Z'(\underline{J}') + \varepsilon^2 R'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \, .$$

Teoria classica delle perturbazioni

- Soluzione approssimata: rimuovere la perturbazione a ordini elevati in ε.

Teorema

Sia $\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) + \varepsilon R(\underline{J}, \underline{\varphi})$ con $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \in V \times \mathbb{T}^n$ per $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto:

- ▶ R analitica e trigonometrica (N coefficienti di Fourier) su $V \times \mathbb{T}^n$;
- ▶ frequenza non-risonante per ogni $\underline{J}_0 \in V$:

$$|\underline{\omega}(\underline{J}_0) \cdot \underline{k}| > 0 \quad \text{for all } \; 0 < |\underline{k}| \leq N \, .$$

Allora, esistono $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ e per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ esiste una trasformazione canonica $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \to (\underline{J}', \underline{\varphi}')$ definita in $S_{\frac{\rho_0}{2}}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n \subset V \times \mathbb{T}^n$ e a valori in $S_{\rho_0}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n$, che trasforma $\mathcal{H}$ in

$$\mathcal{H}'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \; = \; Z'(\underline{J}') + \varepsilon^2 R'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \, .$$

Teoria classica delle perturbazioni

- Soluzione approssimata: rimuovere la perturbazione a ordini elevati in ε.

Teorema

Sia $\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) + \varepsilon R(\underline{J}, \underline{\varphi})$ con $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \in V \times \mathbb{T}^n$ per $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto:

- ▶ R analitica e trigonometrica (N coefficienti di Fourier) su $V \times \mathbb{T}^n$;
- ▶ frequenza non-risonante per ogni $\underline{J}_0 \in V$:

$$|\underline{\omega}(\underline{J}_0) \cdot \underline{k}| > 0 \quad \text{for all } \; 0 < |\underline{k}| \leq N \, .$$

Allora, esistono $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ e per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ esiste una trasformazione canonica $(\underline{J}, \underline{\varphi}) \to (\underline{J}', \underline{\varphi}')$ definita in $S_{\frac{\rho_0}{2}}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n \subset V \times \mathbb{T}^n$ e a valori in $S_{\rho_0}(\underline{J}_0) \times \mathbb{T}^n$, che trasforma $\mathcal{H}$ in

$$\mathcal{H}'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \; = \; Z'(\underline{J}') + \varepsilon^2 R'(\underline{J}', \underline{\varphi}') \, .$$

- La dimostrazione é costruttiva e consente di ottenere

$$\mathcal{H}' = Z' + \varepsilon^2 R', \qquad \mathcal{H}'' = Z'' + \varepsilon^3 R'', \qquad \mathcal{H}''' = Z''' + \varepsilon^4 R''', \qquad \text{ecc.}$$

Un'applicazione: la scoperta di Nettuno

1846: Jean Urbain Leverrier completó i suoi studi matematici per spiegare piccole discrepanze tra la teoria e le osservazioni del moto di Urano.

- Congetturó l'esistenza di un nuovo pianeta ai confini del sistema solare.

Un'applicazione: la scoperta di Nettuno

1846: Jean Urbain Leverrier completó i suoi studi matematici per spiegare piccole discrepanze tra la teoria e le osservazioni del moto di Urano.

- Congetturó l'esistenza di un nuovo pianeta ai confini del sistema solare.

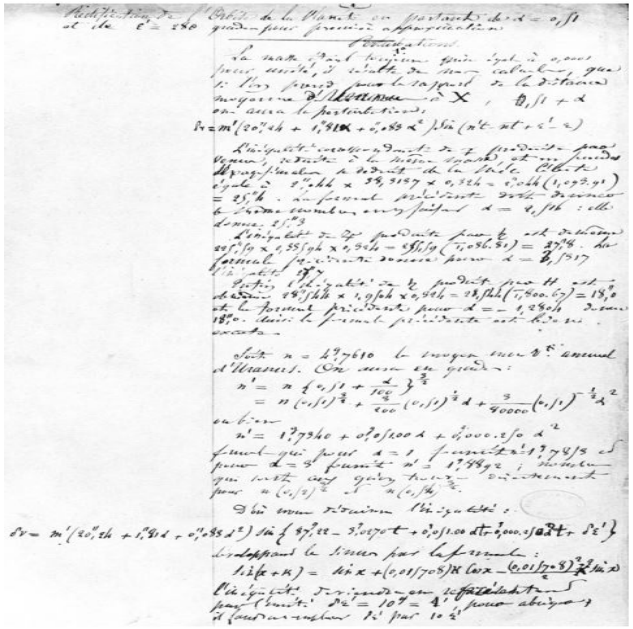
- 18 Settembre 1846: invió una lettera a Johann Galle a Berlino
- 23 Settembre 1846: lo stesso giorno in cui la lettera arrivó, Galle scoprí Nettuno.

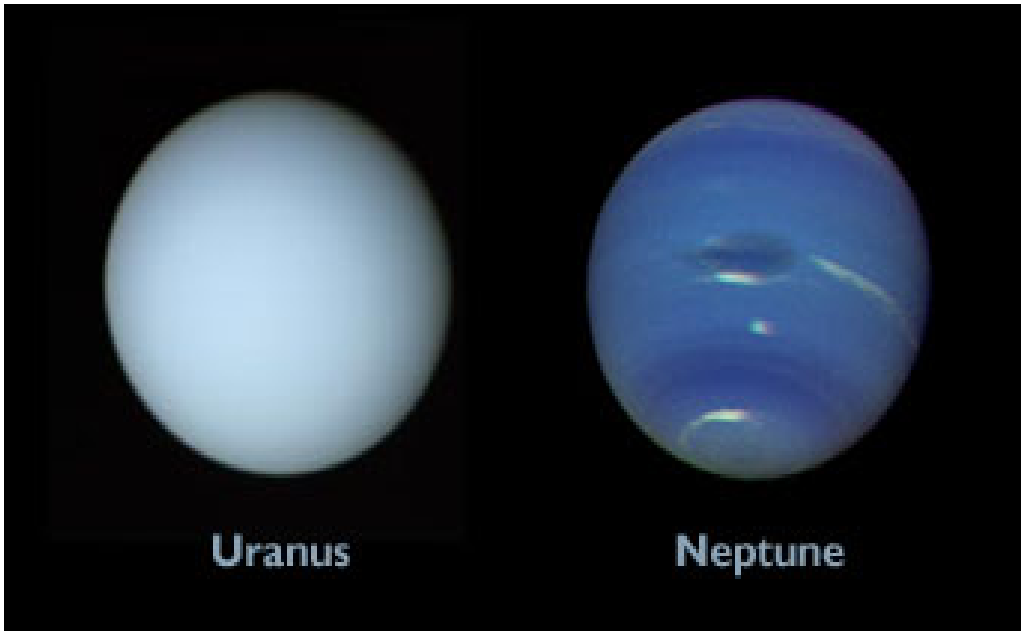
Un'applicazione: la scoperta di Nettuno

1846: Jean Urbain Leverrier completó i suoi studi matematici per spiegare piccole discrepanze tra la teoria e le osservazioni del moto di Urano.

- Congetturó l'esistenza di un nuovo pianeta ai confini del sistema solare.

- 18 Settembre 1846: invió una lettera a Johann Galle a Berlino
- 23 Settembre 1846: lo stesso giorno in cui la lettera arrivó, Galle scoprí Nettuno.





Applicazioni recenti della Teoria delle Pertubazioni

Lista parziale di collaboratori: C. Efthymiopoulos, F. Gachet, C. Gales, I. Gkolias, F. Paita, G. Pucacco, ecc.

- Elementi propri (a, e, i) di asteroidi e comete
- Dinamica rotazionale della Luna
- Risonanza di Laplace tra i satelliti Galileiani di Giove (JUICE 2022)
- Orbite halo attorno ai punti collineari di Eulero-Lagrange e autostrade interplanetarie
- Detriti spaziali: dall'orbita geostazionaria ai satelliti GPS .

Teoria KAM

• Poincaré: gli sviluppi in serie della teoria delle perturbazioni sono in genere divergenti $\Rightarrow$ il P3C non é integrabile + scoperta del caos.

• Problema KAM: assumiamo che un sistema integrabile ($\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J})$) ammetta una soluzione quasi-periodica con frequenza $\underline{\omega}$, i.e. $t \mapsto f(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)$ con frequenze <u>incommensurabili</u> $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

• Il sistema perturbato ($\mathcal{H}(\underline{J}, \underline{\varphi}) = Z(\underline{J}) + \varepsilon R(\underline{J}, \underline{\varphi})$) ammette ancora una soluzione quasi-periodica con la stessa frequenza $\underline{\omega}$ del sistema integrabile?

Teoria KAM

• Teoria KAM: moti quasi–periodici in sistemi Hamiltoniani e conformalmente simplettici [Calleja-Celletti-Llave (2013-)].

Teoria KAM

• Teoria KAM: moti quasi–periodici in sistemi Hamiltoniani e conformalmente simplettici [Calleja-Celletti-Llave (2013-)].

• La teoria KAM puó essere enunciata sotto due condizioni:

- la frequenza soddisfa la condizione Diofantea (per trattare i piccoli divisori) $\mathcal{D}(C,\tau) = \{\underline{\omega} \in \mathbb{R}^n : \ |\underline{\omega} \cdot \underline{q}|^{-1} \leq C|\underline{q}|^{\tau} \ , \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\} \ \}$
- una condizione di non-degenerazione (sulle coordinate - per assicurare la soluzione di un'equazione cooomologica che fornisce la soluzione approssimata).

Teoria KAM

• Teoria KAM: moti quasi–periodici in sistemi Hamiltoniani e conformalmente simplettici [Calleja-Celletti-Llave (2013-)].

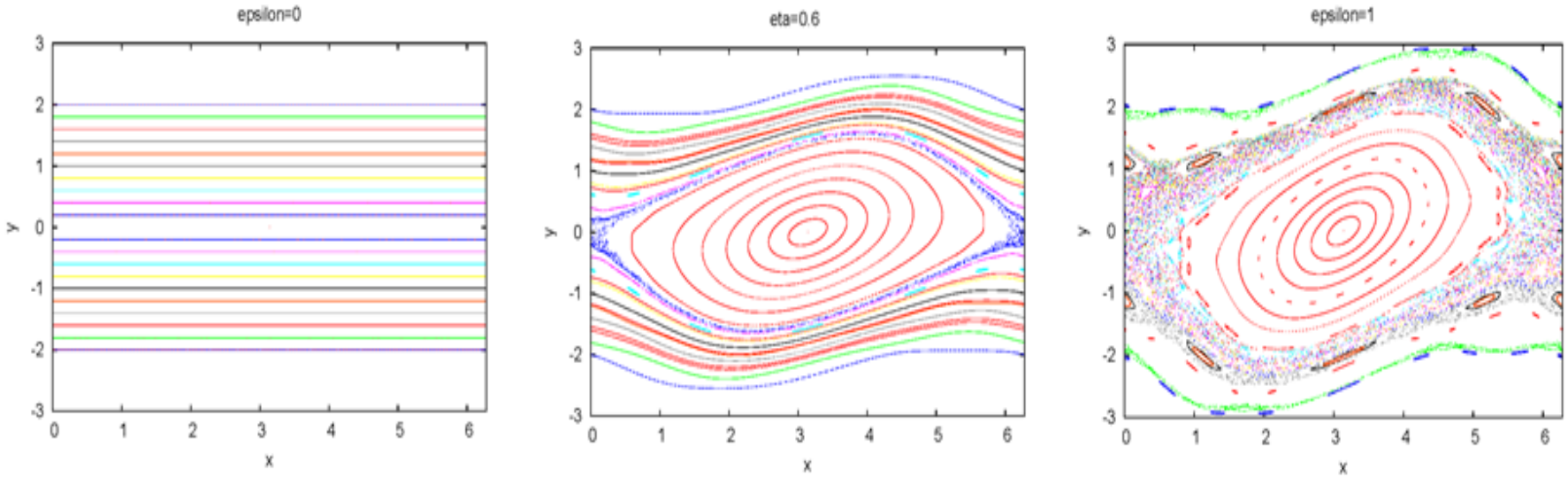
• La teoria KAM puó essere enunciata sotto due condizioni:

- la frequenza soddisfa la condizione Diofantea (per trattare i piccoli divisori) $\mathcal{D}(C,\tau) = \{\underline{\omega} \in \mathbb{R}^n : \ |\underline{\omega} \cdot \underline{q}|^{-1} \leq C|\underline{q}|^{\tau} \ , \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\} \ \}$
- una condizione di non-degenerazione (sulle coordinate - per assicurare la soluzione di un'equazione cooomologica che fornisce la soluzione approssimata).

Teoria KAM

• Arnold: problema a N–corpi, esistenza di un insieme di misura positiva di condizioni iniziali che forniscono tori quasi–periodici per $e, i \simeq 0$.

• Hénon: stime quantitative per il P3C per un rapporto delle masse dei primari pari a 10^{-48} vs. Sole-Giove 10^{-3}:
"Ainsi, ces théorèmes, bien que d'un très grand intérêt théorique, ne semblent pas pouvoir en leur état actuel être appliqués á des problèmes pratiques".



Outline

1. Meccanica Celeste

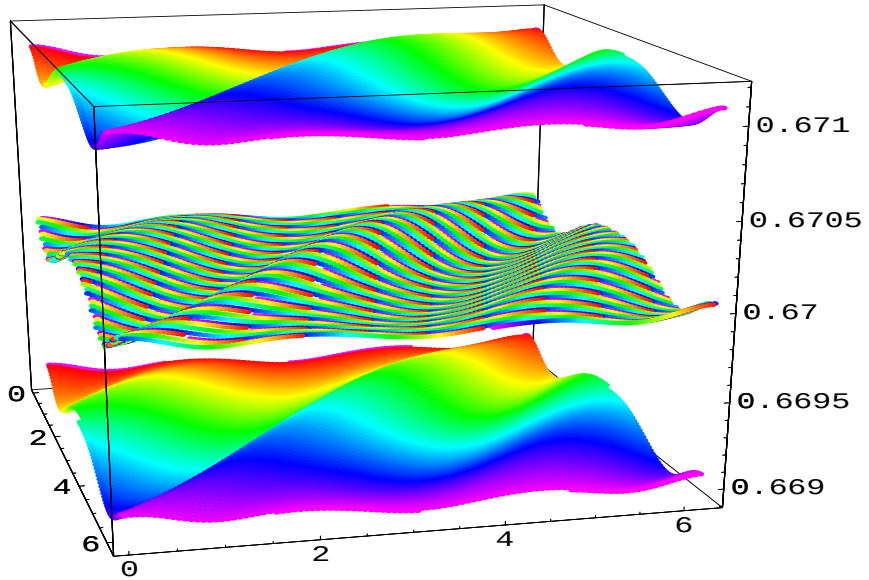
2. Teorie matematiche

3. Applicazioni KAM alla Meccanica Celeste

4. Missioni spaziali

Confinamento KAM

• Confinemento di $\mathcal{H}(J, \varphi, t)$ 1-dim, dipendente dal tempo :
dim(spazio delle fasi)=3, dim(tori invarianti)=2 $\rightarrow$ confinemento nello spazio delle fasi per tempi ∞ causa intrappolamento tra tori invarianti.



• Confinemento non piú valido per $n > 2$: il moto puó diffondere attraverso tori invarianti, raggiuingendo regioni arbitrariamente lontane (diffusione di Arnold).

Stime KAM

• Standard map conservativa: [J.-L. Figueras, A. Haro, A. Luque, 2016] standard map simplettica (twist e non-twist) $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica.

• Standard map dissipativa: [R. Calleja, A.C.,R. de la Llave 2019] $\lambda = 0.9$ $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica, con aggiunta di un parametro.

Stime KAM

• Standard map conservativa: [J.-L. Figueras, A. Haro, A. Luque, 2016] standard map simplettica (twist e non-twist) $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica.
• Standard map dissipativa: [R. Calleja, A.C.,R. de la Llave 2019] $\lambda = 0.9$ $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica, con aggiunta di un parametro.

• Problema spin-orbita conservativo: [AC, 1990] esistono tori invarianti, che confinano il moto della Luna per i valori effettivi astronomici dei parametri.
• Problema spin-orbita dissipativo: [Calleja, AC, Gimeno, de la Llave, 2019] risultati teorici + stime computer-assisted (work in progress).

Stime KAM

• Standard map conservativa: [J.-L. Figueras, A. Haro, A. Luque, 2016] standard map simplettica (twist e non-twist) $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica.
• Standard map dissipativa: [R. Calleja, A.C.,R. de la Llave 2019] $\lambda = 0.9$ $\Longrightarrow$ 99.9% della soglia numerica, con aggiunta di un parametro.

• Problema spin-orbita conservativo: [AC, 1990] esistono tori invarianti, che confinano il moto della Luna per i valori effettivi astronomici dei parametri.
• Problema spin-orbita dissipativo: [Calleja, AC, Gimeno, de la Llave, 2019] risultati teorici + stime computer-assisted (work in progress).

• Problema piano, circolare, ristretto dei 3 corpi: [AC, Chierchia 2007] Versione di Arnold isoenergetica e non–degenere (persistenza di tori invarianti su un fissato livello di energia) applicato a Sole, Giove, asteroide 12 Victoria: esistenza di tori KAM confinanti per $|\varepsilon| \leq 10^{-3}$.

Outline

1. Meccanica Celeste

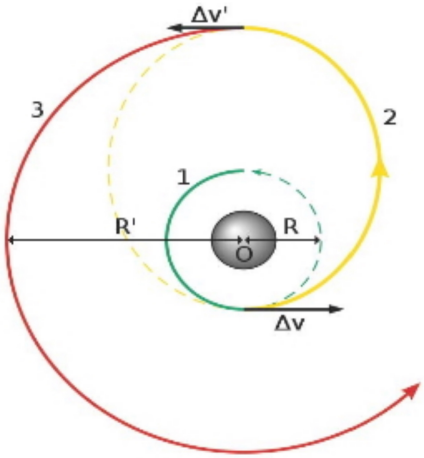
2. Teorie matematiche

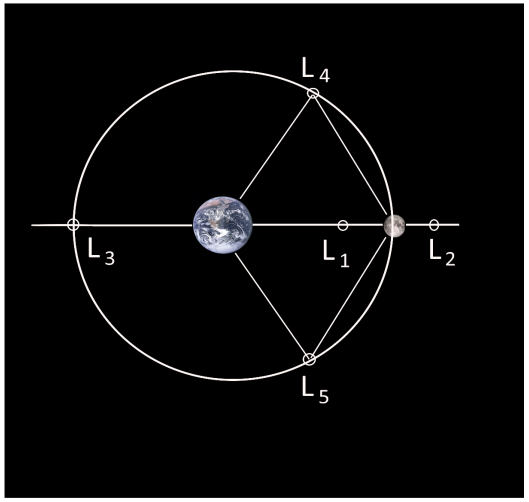
3. Applicazioni KAM alla Meccanica Celeste

4. Missioni spaziali

Missioni spaziali

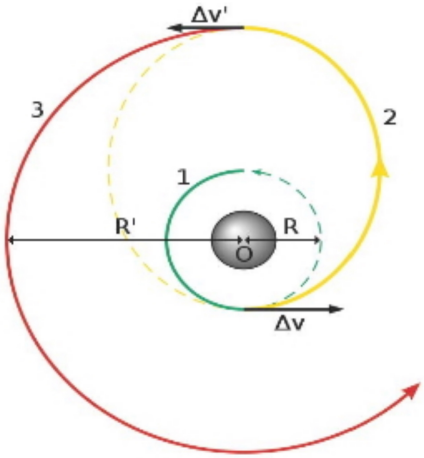
• Andare sulla Luna tramite le orbite di Keplero e i trasferimenti di Hohmann, ovvero usare ellissi di trasferimento tra due orbite circolari con lo stesso centro, sullo stesso piano e raggi differenti: facile, ma costoso.

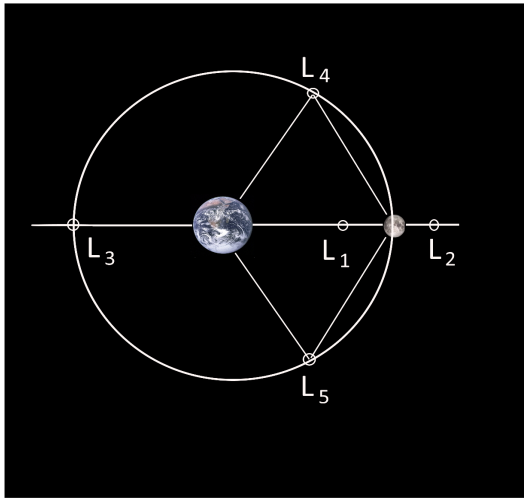




Missioni spaziali

• Andare sulla Luna tramite le orbite di Keplero e i trasferimenti di Hohmann, ovvero usare ellissi di trasferimento tra due orbite circolari con lo stesso centro, sullo stesso piano e raggi differenti: facile, ma costoso.





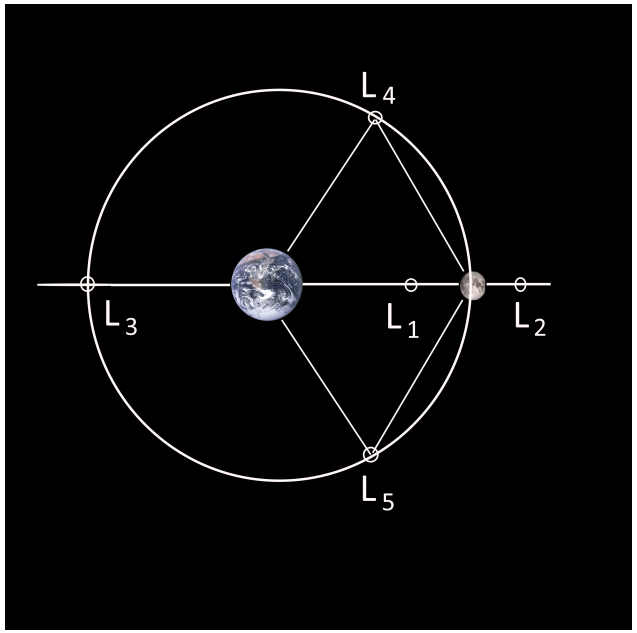
• Punti di equilibrio di Eulero-Lagrange nel riferimento sinodico: triangulari (stabili), collineare (instabili).

J.-L. Lagrange: “Cette recherche n’est à la vèritè que de pure curiositè" (Essai sur le Probléme des trois Corps (1772).

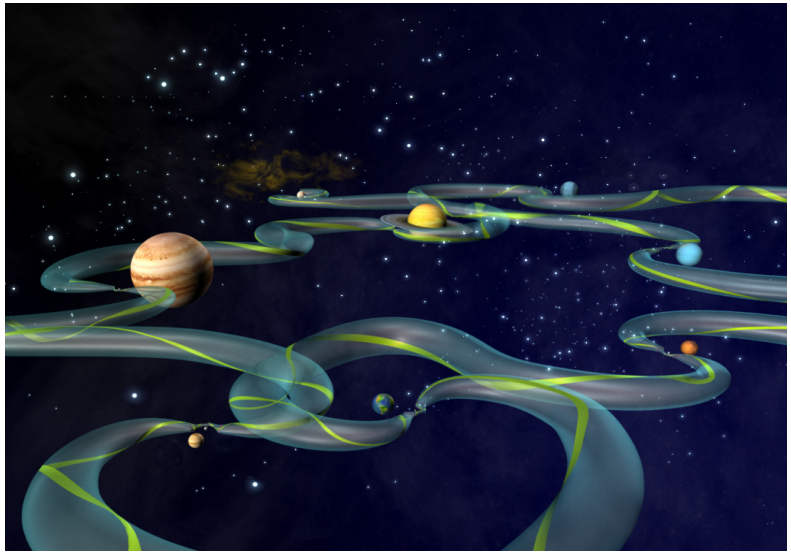
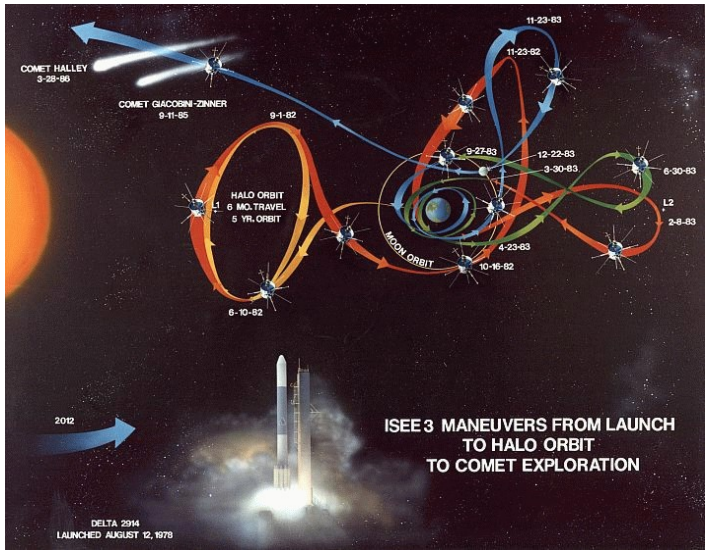
1906: primo asteroide nei punti triangolari, 588 Achilles, scoperto nel 1906 dall’astronomo Max Wolf.

Missioni spaziali

• C. Conley in 1968 scrive un articolo visionario: l'esistenza di orbite di transito dalla Terra alla Luna attraverso L_1 usando le equazioni linearizzate attorno a L_1 e la versione di Moser del teorema di Lyapunov $\Rightarrow$ viaggi low-cost che sfruttano l'instabilitá di L_1.



"Unfortunately, orbits such as these require long time to complete a cycle (e.g., 6 months, though a modification of the notion might improve that). On the other hand, one cannot predict how knowledge will be applied - only that it often is" (SIAM J. Appl. Math.16, n. 4, 1968)

Missioni spaziali

- Autostrade interplanetarie attraverso la “Space Manifold Dynamics" (punti Lagrangiani, risonzanze, tori KAM, ecc.): International Sun/Earth Explorer 3 (1978), SOHO (1995), WMAP (2001), GENESIS (2001), HERSCHEL-PLANCK (2009)