UNIVERSITÀ DI CATANIA - DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
OPEN DAYS, 14 FEBBRAIO 2019

Due grandi protagonisti dell'analisi matematica: l'ordine e la distanza

Salvatore A. Marano

Nel Seicento, Fermat, affrontando il problema della ricerca dei punti x_0 di massimo e di minimo per una data espressione $y = f(x)$ (la parola funzione non era ancora nota), cioè, come diremmo oggi, un problema di ottimizzazione, mise a punto il seguente metodo:

1. si calcola il rapporto
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$
che dipende sia dal valore x_0 da trovare sia dall'incremento h;

2. si pone $h = 0$, ottenendo un'espressione, denotata con $f'(x_0)$, dove compare solo x_0;

3. si risolve l'equazione $f'(x_0) = 0$ nell'incognita x_0.

Alla fine del secolo, Newton e Leibniz, indipendentemente, introdussero il concetto di *derivata* (termine che venne però usato per la prima volta da Lagrange diversi anni dopo), sviluppandone in modo straordinario lo studio e l'utilizzo, tanto da essere considerati gli inventori del *calcolo differenziale.*

Tuttavia, nel 1730 circa, un vescovo irlandese, Berkely, fece la seguente - oggi ovvia - critica al metodo di Fermat: il primo passo presuppone $h \neq 0$; non si può quindi porre $h = 0$ per trovare $f'(x_0)$. Eppure le derivate avevano permesso di ottenere risultati spettacolari in svariati ambiti!

Agli inzi dell'Ottocento, Cauchy e Weierstrass avvertirono la necessità di rifondare la matematica basandosi su *assiomi chiari e dimostrazioni scrupolose.* Nel 1821 Cauchy formulò il concetto di *limite.* Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

quando il numero reale $g(x)$ risulta arbitrariamente vicino ad l per x opportunamente vicino a x_0 e diverso da x_0. Oltre ai due avverbi (arbitrariamente e opportunamente), questa frase contiene un termine da precisare, cioè "vicino". Nel linguaggio comune, due oggetti sono vicini quando la loro distanza è piccola. Ecco i due protagonisti della nostra chiacchierata: distanza e ordine.

Grazie all'idea di Cauchy, la derivata può essere ora rigorosamente definita come limite del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Distanza. Nell'insieme dei numeri reali, la distanza $d(a, b)$ tra due elementi a e b è definita in modo naturale ponendo

$$d(a, b) := |a - b|.$$

Concetti analoghi si danno nel piano $\mathbb{R}^2$ e nello spazio $\mathbb{R}^3$, privilegiando il punto di vista euclideo, vale a dire la distanza tra due punti è la lunghezza del segmento che li congiunge.

Non sempre però è questa la scelta migliore. Sul globo terrestre, infatti, si usa prevalentemente la distanza geodetica. Si potrebbe inoltre pensare di lavorare in un insieme astratto S munito di un'applicazione $d : S \times S \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà (tipiche di una distanza o metrica):

- $d(a,b) \geq 0 \ \forall\, a, b \in S$ e $d(a,b) = 0 \iff a = b$.
- $d(a,b) = d(b,a) \ \forall\, a, b \in S$.
- $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \ \forall\, a, b, c \in S$.

Si tratta dei cosiddetti *spazi metrici*, dove non necessariamente c'è una geometria, vale a dire una struttura di spazio vettoriale. E ancora, il concetto di vicinanza deve per forza essere dato attraverso una distanza? La risposta, negativa, porta a studiare nuovi e più generali ambiti, chiamati *spazi topologici*.

Ordine. È possibile confrontare qualunque coppia di numeri reali, in modo tale da poter dire chi dei due è il più piccolo? Esistono numeri reali arbitrariamente vicini a uno dato? Queste e altre questioni portarono Dedekind a formulare in maniera assiomatica il sistema dei numeri reali. Fra gli assiomi proposti figurano quelli inerenti l'ordine. Nell'insieme $\mathbb{R}$ è definita una relazione di ordinamento $\leq$ con le seguenti proprietà:

1. $a \leq a \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
2. $a \leq b, \ b \leq a \implies a = b$;
3. $a \leq b, \ b \leq c \implies a \leq c$;
4. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ risulta $a \leq b$ oppure $b \leq a$;
5. se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti e *separati* di $\mathbb{R}$, cioè
$$a \leq b \quad \forall\, a \in A, b \in B,$$
allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$.

In particolare, l'assioma n. 4 permette di rispondere positivamente alla prima domanda, mentre il successivo, noto come assioma di continuità o di Dedekind, fornisce numeri reali arbitrariamente vicini.

L'ordinamento, accoppiato alla struttura algebrica di $\mathbb{R}$ tramite i due ulteriori assiomi

6. $a \leq b \implies a + c \leq b + c$,
7. $0 \leq a, \ 0 \leq b \implies 0 \leq ab$,

consente di parlare con rigore di intervalli, estremi di un insieme numerico, ecc., fino ad arrivare al concetto di integrabilità e integrale secondo Riemann per una funzione limitata. Quest'ultimo, peraltro, prende spunto dal noto procedimento di esaustione di Archimede.

Sappiamo pure che, mentre per nessun numero razionale r risulta $r^2 = 2$,

Theorem 1. *Esiste un unico numero reale positivo c tale che $c^2 = 2$.*

Esso viene individuato mediante l'assioma n. 5. Allo scopo, si introducono i due insiemi

$$A := \{a \in \mathbb{R} : a > 0,\, a^2 \leq 2\}, \quad B := \{b \in \mathbb{R} : b > 0,\, b^2 \geq 2\}.$$

Ovviamente, A e B sono non vuoti e separati. Dunque, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall\, a \in A,\ b \in B.$$

Ragionando per assurdo si prova che non può aversi né $c^2 < 2$ né $c^2 > 2$ (questa è la parte più delicata). Pertanto $c^2 = 2$, come desiderato.

Il numero reale positivo fornito dal Teorema 1 si denota con $\sqrt{2}$ e rappresenta, insieme a π, l'esempio più celebre di numero irrazionale: si tratta dei cosiddetti *numeri surdi* (o muti), che si sanno indicare ma non si possono esprimere.

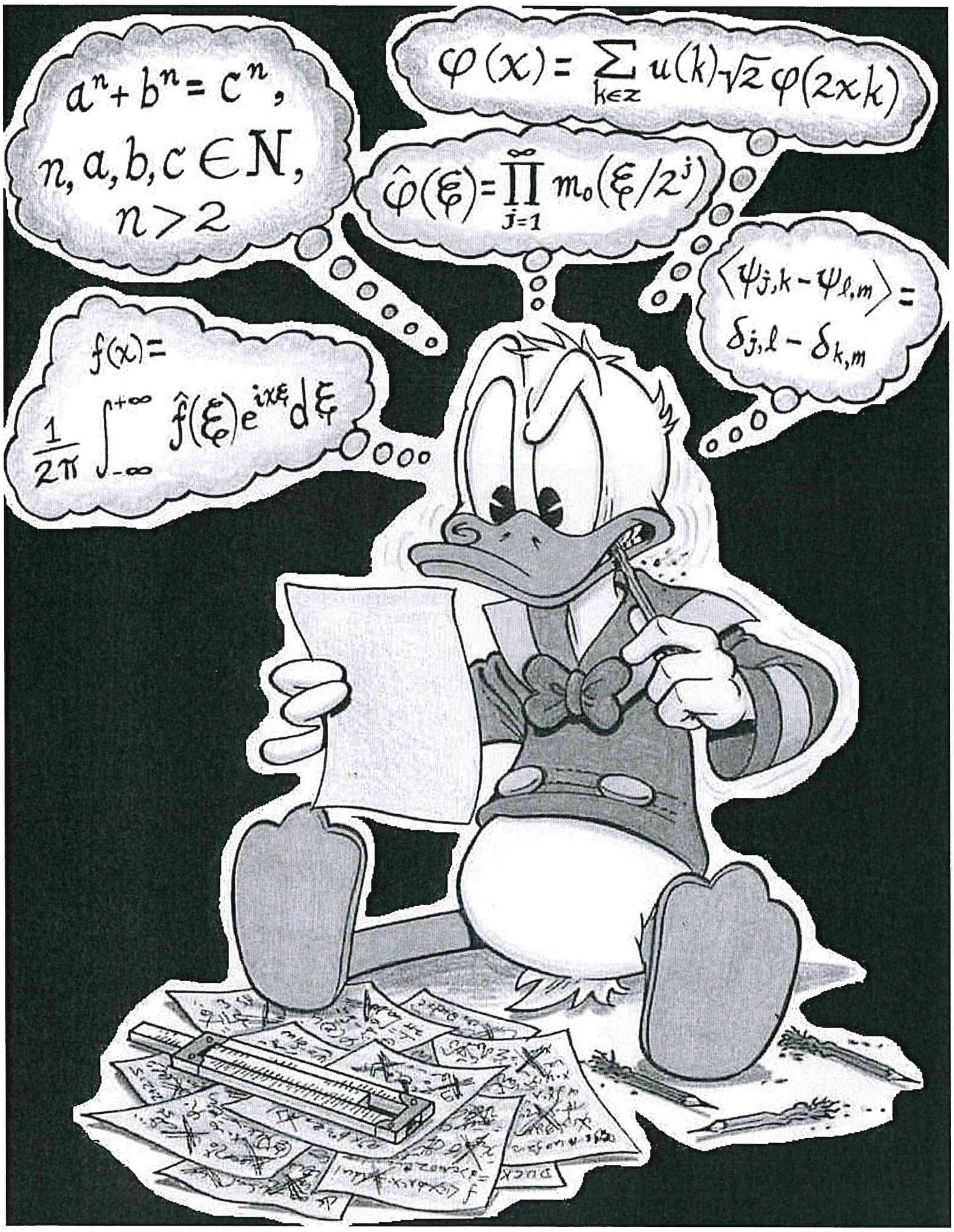
L'ordinamento di $\mathbb{R}$ permea la nostra vita di tutti i giorni, apparendo in ambiti fra loro diversissimi. Ad esempio, quando si parla di andamento di un titolo in borsa, temperatura di una regione o di un individuo in un dato intervallo di tempo, curva della pressione arteriosa, e così via, si fa - più o meno consapevolmente - uso della nozione di monotonia: una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona non derescente se

$$x_1 \leq x_2,\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

o, equivalentemente, se

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0 \ \ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

La definizione di funzione monotona non crescente è analoga.


$a^n + b^n = c^n,$
$n, a, b, c \in \mathbb{N},$
$n > 2$
$\varphi(x) = \sum_{k \in z} u(k) \sqrt{2}\, \varphi(2xk)$
$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi / 2^j)$
$\langle \psi_{j,k} - \psi_{l,m} \rangle =$
$\delta_{j,l} - \delta_{k,m}$
$f(x) =$
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$


Eureka! Questo l'ho capito!