{ PROGRAMMA -DI SCRITTURA LYX }

- { }

Lezione 28 Settembre 2020

Esercizio su una disequazione irrazionale

$\sqrt{x^2+2x+9} \geq x+1$

Risolviamo la disequazione

Vedi slide 19

$$\begin{cases} x^2+2x+9 & \geq 0 \\ x+1 & \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 & \geq 0 \\ x^2+2x+9 & \geq (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = & \frac{-1\pm\sqrt{2-9}}{1} \\ x & \leq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x & \geq -1 \\ x^2+2x+9-x^2-1-2x & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = & \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{1} \\ x & \leq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x & \geq -1 \\ 8 & \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle < 0, \textit{segni concordi} \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} & \\ x & \leq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x & \geq -1 \\ 8 & \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Grafico I sistema

_____-1_____

_____

_____•_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

continuo sopra e continuo sotto$\rightarrow x \leq -1$

Grafico II sistema:

_____-1_____

_____

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ •_____

continuo sopra e continuo sotto$\rightarrow x \geq -1$

L'unione dei due sistemi porta ad UNIRE le due soluzioni trovate

significa elencarli e metterli sulla stessa retta per vederli graficamente

cioè:

_____-1_____

retta I-II sistema è:_____•_____

risulta tutta la retta$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

fine esercizio

ESPONENZIALI

Teoria in sintesi

Potenze con esponente reale

Ricordiamo la formula n.1

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Ricordiamo la formula n.2

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1}$
$a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$
La potenza a^x è definita
•Se la base è positiva, cioè $a > 0$, invece l'esponente è un numero reale sia positivo che negativo $\forall x \in \mathbb{R}$
•Se la base è nulla, cioè $a = 0$, l'esponente per tutti i numeri reali positivi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
•Se la base è negativa, $(-a)^x$, allora l'esponente deve essere un numero intero relativo, $\forall x \in \mathbb{Z}$
•Se la base è uno, $(1^x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
•
Esempi:
$2^x \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$0^x \rightarrow \forall x > 0$. Questo perchè? Se avessimo $0^{-2} = \frac{1}{0^2} \rightarrow$impossibile
$(-2)^x \rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$. Questo perchè? Se avessimo $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)^1}$assurdo
•$x = 0, a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^+$
•$a^x > 0$ SEMPRE SE $a > 0$
esempio:
2^x
vediamo il suo segno:
supponiamo $x = 3 \rightarrow 2^3 = 8 > 0$
supponiamo $x = -2 \rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > 0$
Equazioni esponenziali
è esponenziale quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze

$$a^x = b$$

con $a > 0$.
Per equilibrare l'equazione b come deve essere? $b > 0$
I membro sempre positivo , II pure!
esempio
$4^{x+1} = -2$, non si risolve perchè già so che è IMPOSSIBILE.
Invece se avessimo avuto
$4^{x+1} = 2$ ha senso$\rightarrow$ si deve risolvere
$2^{2(x+1)} = 2^1$
ho un'ugualglianza tra due potenze aventi la stessa base$\rightarrow$si uguagliano gli esponenti
$2(x+1) = 1 \rightarrow 2x + 2 = 1 \rightarrow 2x = 1 - 2 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Esempio di equazione esponenziale elementare
$2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$
Equazione esponenziale del tipo (stessa base)

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$$

esempio
$(2^{x-1})^x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8^{x+1}}$

osserviamo le potenze che abbiamo
sono tutte potenze di 2

$(2^{x-1})^x \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{3(x+1)}}$

$\frac{2^{x^2-x}}{2^2} = \frac{1}{2^{3x+3}}$

$2^{x^2-x-2} = 2^{-3x-3}$

$\rightarrow x^2 - x - 2 = -3x - 3 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Equazione del tipo (stesso esponente)

$$m \cdot a^{f(x)} = n \cdot b^{f(x)} \rightarrow \frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = \frac{n}{m} \rightarrow (\frac{a}{b})^{f(x)} = \frac{n}{m}$$

Esempio
$15 \cdot 3^{2x+1} = 9 \cdot 5^{2x+1}$
hanno lo stesso esponente

$\frac{3^{2x+1}}{5^{2x+1}} = \frac{9}{15} \rightarrow (\frac{3}{5})^{2x+1} = \frac{9}{15} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \frac{3}{5} \rightarrow 2x + 1 = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Equazione del tipo (incognita ausiliaria $t = a^x$)

$$\lambda \cdot (a^x)^2 + \mu \cdot a^x + \delta = 0 \rightarrow pongo\ a^x = t \rightarrow \lambda t^2 + \mu t + \delta = 0$$

e si risolve l'equazione di secondo grado in t.
Esempio
$2^{2x} - 2^x - 2 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$
pongo $2^x = t$
l'equazione diventa:
$t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow \triangle = 1 + 8 = 9 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = 2, t_2 = -1$
Adesso t chi era?
$t_1 = 2^{x_1} = 2^1 \rightarrow x_1 = 1$
$t_2 = 2^{x_2} = -1 \rightarrow impossibile, \emptyset$

Disequazioni esponenziali
Da riguardare

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

•Se $a > 1 \rightarrow$la disequazione diventa: $f(x) > g(x)$
•Se $0 < a < 1 \rightarrow$la disequazione diventa al contrario: $f(x) < g(x)$
Idem per

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

•Se $a > 1 \rightarrow$la disequazione diventa: $f(x) < g(x)$
•Se $0 < a < 1 \rightarrow$la disequazione diventa al contrario: $f(x) > g(x)$
Osservazione
Se $a = 1 \rightarrow 1^{f(x)} > 1^{g(x)}$assurdo$\rightarrow$ *caso* non contemplato
Esercizi
$3^x + 3 \cdot \frac{1}{3^3} > \frac{28}{9} \rightarrow 3^x + \frac{1}{3^2} - \frac{28}{3^2} > 0 \rightarrow \frac{3^2 \cdot 3^x + 1 - 28}{3^2} > 0 \rightarrow$

$9 \cdot 3^x + 1 - 28 > 0 \rightarrow 9 \cdot 3^x - 27 > 0 \rightarrow 3^x > \frac{27}{9} \rightarrow 3^x > 3^1 \rightarrow x > 1$

$(\frac{1}{5})^{3x+2} > 1 \rightarrow (\frac{1}{5})^{3x+2} > (\frac{1}{5})^0$, adesso notiamo che $\frac{1}{5} < 1$
quindi la disequazione va al contrario, cioè va cambiata di segno e diventa
$3x + 2 < 0 \rightarrow x < -\frac{2}{3}$

Il concetto di logaritmo

$$log_a b$$

si legge «logaritmo in base a di b», dove a è detta base e b è detto argomento
Il significato qual è?
E' l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento

$$log_2 8 =? \ cercasi \ esponente...$$

per ottenere in questo $8 \rightarrow 2^3 = 8 \rightarrow$il logaritmo è $3 \rightarrow log_2 8 = 3$
$\bullet log_2 1 = 0 (\rightarrow 2^0 = 1)$
Si generalizza:

$$log_a 1 = 0$$

$\bullet log_2 \frac{1}{2} = log_2 2^{-1} = -1$
$\bullet log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$
nel senso che il logaritmo è un semplice esponente

$$log_a b = x \iff a^x = b \iff a^{log_a b} = b$$

Esempio
1) Risolvere le seguente equazione:
$log_2 x = 3$
un metodo per risolvere è trasformare il numero (termine noto) in logaritmo dello stesso tipo (uguale base)
di quello precedente che compare nello stesso esercizio
Trasformare il numero 3 in log_2?....
FORMULA PER TRASFORMARE UN NUMERO IN LOGARITMO:

$$k = log_a a^k \ (dalla \ definizione \ di \ log)$$

L'esercizio diventa una uguaglianza tra due logaritmi aventi la stessa base:
$log_2 x = log_2 2^3$
elimino i logaritmo ed uguaglio gli argomenti (senza la parola log)
$x = 2^3 \rightarrow x = 8$
Ovviamente bisogna porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero
$\bullet Se \ x > 0$ allora l'equazione esiste
La soluzione è $x = 8$, poi devo controllare la compatibilità con la condizione del SE
Essendo $8 > 0$ è compatibile

Quindi la soluzione dell'equazione rimane $x = 8$.
Formula dell'equazione è:

$$log_a f(x) = log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$$

Inoltre:
Se abbiamo un'equazione nella forma

$$log_a f(x) = k \iff log_a f(x) = log_a a^k \iff f(x) = a^k$$