{ PROGRAMMA -DI SCRITTURA LYX }

- { }

Lezione 25 Settembre 2020

Esercizio

$|1-|x||=\frac{1}{2}$

Bisogna partire dall'interno

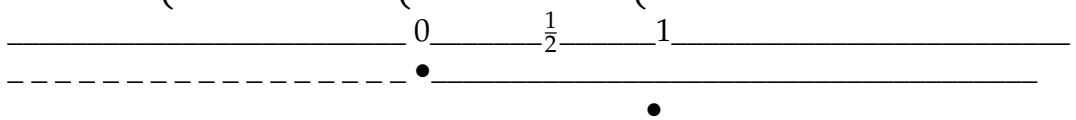
Iniziamo da $|x|$

•Se $x \geq 0$ →l' equazione senza il v.a. interno è

$|1-x|=\frac{1}{2} \rightarrow$ •*Prima ramificazione Se* $1-x \geq 0$

→l'equazione senza il v.a. esterno è: $1-x=\frac{1}{2} \rightarrow -x=\frac{1}{2}-1 \rightarrow -x=\frac{-1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Risolviamo un sistema con le due condizioni del SE, e poi si vede la compatibilità della soluzione $\begin{cases} x & \geq 0 \\ 1-x & \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ -x & \geq -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ x & \leq 1 \end{cases}$



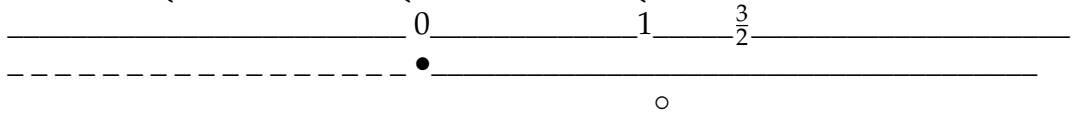
deve essere continuo sopra e sotto perchè è sistema

La soluzione $x=\frac{1}{2}$ è compatibile, quindi si prende!

$|1-x|=\frac{1}{2} \rightarrow$ •*Seconda ramificazione Se* $1-x<0$

→l'equazione senza il v.a. esterno è: $-1+x=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{2}+1 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Risolviamo un sistema con le due condizioni del SE, e poi si vede la compatibilità della soluzione $\begin{cases} x & \geq 0 \\ 1-x & < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ -x & < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ x & > 1 \end{cases}$



La soluzione $x=\frac{3}{2}$ è compatibile, quindi si prende!

Adesso cambiamo il primo SE E SI RICOMINCIA

•Se $x<0$ →l'equazione senza il v.a. interno

$|1+x|=\frac{1}{2} \rightarrow 1+x=\pm\frac{1}{2} \rightarrow$

Una con il più e una con il meno

$1+x=\frac{1}{2} \rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$1+x=-\frac{1}{2} \rightarrow x=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

Le soluzioni sono $\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$

Esercizio

$\frac{|x^2|+3}{|x-1|}-|x-2|=0$

Sono tre i v.a. ma effettivamente parliamo solo di due v.a. perchè $|x^2|=x^2$

Di conseguenza l'equazione diventa:

$\frac{x^2+3}{|x-1|}-|x-2|=0$

Iniziamo da $|x-1|$

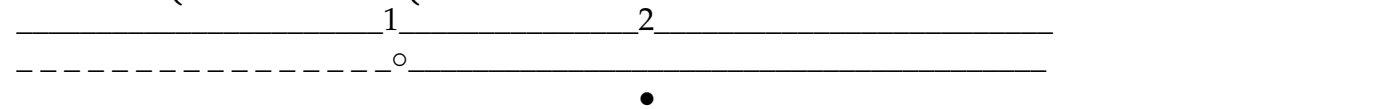
•Se $x-1>0$ →l'equazione senza il primo v.a. diventa

$\frac{x^2+3}{x-1}-|x-2|=0$

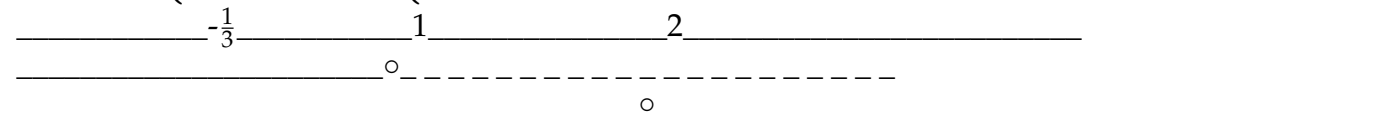
•*Prima ramificazione Se* $x-2 \geq 0$

→l'equazione senza il secondo è: $\frac{x^2+3}{x-1}-(x-2)=0 \rightarrow \frac{x^2+3}{x-1}-x+2=0$

$\frac{x^2+3}{x-1} = x-2 \rightarrow x^2+3 = (x-1)(x-2) \rightarrow x^2+3 = x^2-2x-x+2 \rightarrow$
$3+3x-2=0 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$
Risolviamo un sistema con le due condizioni del SE, e poi si vede la compatibilità della soluzione $\begin{cases} x-1 & >0 \\ x-2 & \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & >1 \\ x & \geq 2 \end{cases}$



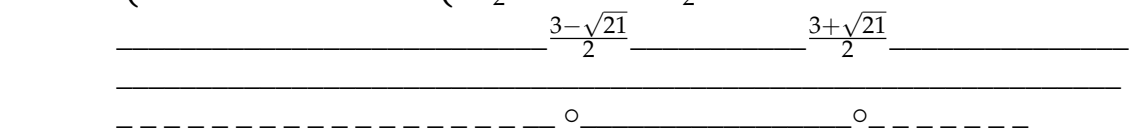
La soluzione $x=-\frac{1}{3}$ non è compatibile, quindi non si prende!
•*Seconda ramificazione Se* $x-2<0$
$\rightarrow$l'equazione senza il secondo è: $\frac{x^2+3}{x-1}+(x-2)=0 \rightarrow \frac{x^2+3}{x-1}+x-2=0$
$\frac{x^2+3}{x-1} = -x+2 \rightarrow x^2+3 = (x-1)(-x+2) \rightarrow x^2+3 = -x^2+2x+x-2 \rightarrow$
$2x^2-3x+5=0 \rightarrow \triangle = 9-40<0 \rightarrow$equazione è impossibile
Adesso cambiamo il primo SE E SI RICOMINCIA
•Se $x-1<0 \rightarrow$l'equazione senza il primo v.a. diventa
$\frac{x^2+3}{-x+1} - |x-2| = 0$
•*Prima ramificazione Se* $x-2 \geq 0$
$\rightarrow$l'equazione senza il secondo è: $\frac{x^2+3}{-x+1}-(x-2)=0 \rightarrow \frac{x^2+3}{1-x}-x+2=0$
$\frac{x^2+3}{1-x} = x-2 \rightarrow x^2+3 = (1-x)(x-2) \rightarrow x^2+3 = x-2-x^2+2x \rightarrow$
$2x^2-3x+5=0 \rightarrow \triangle = 9-40<0 \rightarrow$equazione è impossibile
•*Seconda ramificazione Se* $x-2<0$
$\rightarrow$l'equazione senza il secondo è: $\frac{x^2+3}{1-x}+(x-2)=0 \rightarrow \frac{x^2+3}{1-x}+x-2=0$
$\frac{x^2+3}{1-x} = 2-x \rightarrow x^2+3 = (1-x)(2-x) \rightarrow x^2+3 = 2-x-2x+x^2 \rightarrow$
$3+3x-2=0 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$
Risolviamo un sistema con le due condizioni del SE, e poi si vede la compatibilità della soluzione $\begin{cases} x-1 & <0 \\ x-2 & <0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & <1 \\ x & <2 \end{cases}$



La soluzione $x=-\frac{1}{3}$ è compatibile, quindi si prende!
La soluzione dell'equazione assegnata è $x=-\frac{1}{3}$

Disequazioni con un solo valore assoluto ed un numero
Primo caso:
$|x^2-3x| > -2$
la devo risolvere secondo voi?ASSOLUTAMENTE NON HO NULLA DA RISOLVERE PERCHE' E' SEMPRE VERA (dato che il v.a. è sempre positivo, quindi maggiore di un numero negativo lo è sempre!!!)
$\forall x \in \mathbb{R}$
Secondo caso:
$|x^2-3x| < -2$
la devo risolvere secondo voi?ASSOLUTAMENTE NO!
NON HO NULLA DA RISOLVERE PERCHE' E' SEMPRE FALSA
(dato che il v.a. è sempre positivo, quindi minore di un numero negativo mai!!!)
$S = \emptyset$
Terzo caso:

$|x^2 - 3x| > +3$
si risolve con una formuletta:
$|A(x)| > k \Longleftrightarrow A(x) < -k \; o \; A(x) > k \; (v.e.)$
$x^2 - 3x < -3 \; o \; x^2 - 3x > 3$
sono due disequazioni di secondo grado da risolvere separatamente
I) $x^2 - 3x + 3 < 0 \rightarrow \triangle = 9 - 12 < 0$ I segni sono discordi$\rightarrow$ disequazione sempre falsa
II) $x^2 - 3x - 3 > 0 \rightarrow \triangle = 9 + 12 = 21 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ I segni sono concordi
quindi v.e.$\rightarrow x < \frac{3-\sqrt{21}}{2} \; x > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$
Quarto caso:
$|x^2 - 3x| < +3$
si risolve con una formuletta:
$|A(x)| < k \Longleftrightarrow -k < A(x) < k \; (v.i.)$
$-3 < x^2 - 3x < 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x & > -3 \\ x^2 - 3x & < 3 \end{cases}$
diventa sistema di due disequazioni, quindi tratta continuo sopra e sotto
$\begin{cases} x^2 - 3x + 3 & > 0 \\ x^2 - 3x - 3 & < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{3-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$



La soluzione è v.i.
$\frac{3-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{21}}{2}$
Esercizi su disequazioni con valore assoluto da risolvere a casa:
$|3x + 5| - 4 > 6$
$1 > 12 - |3x + 5|$
$3 - |2x + 1| < |6x + 3| + 5$
$3 + |x - 2| > 8 - |x - 2|$
$|\frac{3-2x}{x+1}| < 1$
$|x^2 - 4| < x^2 + 5x + 10$
$|x| > x^2 - 4x + 6$

Le equazioni irrazionali
Primo caso di equazione irrazionale ad indice pari

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

Si isola la radice quadrata al I membro e poi si fanno le due condizioni con l'elavazione al quadrato e diventa un sistema a tre!
Data la seguente equazione:
$\sqrt{x+5} = 2x + 1$
Come si risolve?
Occorrono due condizioni e poi si eleva al quadrato ambo i membri in modo da togliere la radice
Le due condizioni quali sono?
n.1 radicando ≥ 0 (è ovvio perchè la radice quadrata di un numero negativo non esiste)
n.2 II membro ≥ 0 (è ovvio perchè il primo membro è composta dalla radice quadrata che è sempre positiva, altrimenti si tratterebbe di un'equazione impossibile)
$\begin{cases} n.1 \\ n.2 \\ elevare \; al \; quadrato \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 5 & \geq 0 \\ 2x + 1 & \geq 0 \\ x + 5 & = (2x + 1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq -5 \\ x & \geq -\frac{1}{2} \\ x + 5 & = 4x^2 + 1 + 4x \end{cases}$

$$\begin{cases} x & \geq -5 \\ x & \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2+3x-4 & = 0 \rightarrow \triangle = 9+64 = 73 \rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{73}}{8} \end{cases}$$

la compatibilità delle due soluzioni

__________________-5__________-$\frac{1}{2}$__________$\frac{-3+\sqrt{73}}{8}$______________

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ •__________________________________

_ _ _ _ __ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ •______________________

L'unica soluzione $x = \frac{-3+\sqrt{73}}{8}$

____

Primo caso di equazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$$

si fanno le due condizioni con l'elevazione al quadrato
e diventa un sistema a tre!
Data la seguente equazione:
$\sqrt{x+5} = \sqrt{2x}$
Come si risolve?
Occorrono due condizioni e poi si eleva al quadrato ambo i membri in modo da togliere la radice
Le due condizioni quali sono?
n.1 radicando ≥ 0 (è ovvio perchè la radice quadrata di un numero negativo non esiste)
n.2 radicando ≥ 0 (è ovvio)

$$\begin{cases} n.1 \\ n.2 \\ elevare\ al\ quadrato \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+5 & \geq 0 \\ 2x & \geq 0 \\ x+5 & = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq -5 \\ x & \geq 0 \\ x+5 & = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq -5 \\ x & \geq 0 \\ x & = 5 \end{cases}$$

__________________-5__________0___________5_____________

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ •__________________________________

_ _ _ _ __ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ •______________________

La soluzione è $x = 5$
Terzo caso di equazione irrazionale
vedi slide n.6-7
Quarto caso di equazione irrazionale

$$\sqrt{A(x)} = k$$

Se $k < 0$ →equazione è impossibile

Se $k > 0 \rightarrow \begin{cases} n.1 & radicando \geq 0 \\ elevare\ al\ quadrato & A(x) = k^2 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+2x} = -1$→impossibile

$\sqrt{x^2+2x} = 1 \rightarrow \begin{cases} x^2+2x & \geq 0 \\ x^2+2x & = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -2\ o\ x \geq 0 \\ x^2+2x-1 = 0 & \frac{\triangle}{4} = 1+1 = 2 \end{cases}$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{1}, x = -1-\sqrt{2}, x = -1+\sqrt{2}$

andiamo alla compatibilità, entrambe vanno prese

__________-1-$\sqrt{2}$_________-2______________0__________-1+$\sqrt{2}$______

__________________________•_ _ _ _ _ _ _ _ _ •__________________

____

Nel caso in cui ho un'equazione irrazionale con il cubo le condizioni scompaiono quindi n.1 n. 2 non ci sono più
Si deve solo elevare al cubo ambo i membri

Disequazioni irrazionali:
Primo caso
$\sqrt{16+x^2}-x \leq -3 \rightarrow$
$\sqrt{16+x^2} \leq x-3$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} A(x) & \geq 0 \\ B(x) & \geq 0 \\ elevare & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16+x^2 & \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-3 & \geq 0 \\ 16+x^2 & \leq (x-3)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 3 \\ 16+x^2 & \leq x^2+9-6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq 3 \\ 6x & \leq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \geq 3 \\ x & \leq -\frac{7}{6} \end{cases} \rightarrow \text{continuo sopra e continuo sotto} \rightarrow \text{ non si incontrano} \rightarrow \emptyset$$