{ PROGRAMMA -DI SCRITTURA LYX }

- { }

Lezione 24 Settembre 2020

VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto di un numero è il numero privato del segno

$|-3| = -(-3) = 3$

«quando dentro il valore assoluto ho una quantità negativa
per togliere le sbarre del valore assoluto devo fare il suo opposto o meglio
si può anche dire che cambio di segno»

$|3| = 3$

«quando dentro il valore assoluto ho una quantità positiva
per togliere le sbarre del valore assoluto non devo fare nulla, solo ricopiare la quantità senza sbarre»

Questa è una regola che vale pure per i polinomi

$|A(x)| =?$

dipende dalla disequazione che poi diventa condizione necessaria
per togliere le sbarre del valore assoluto

Quindi

REGOLA GENERALE

1) Se il polinomio dentro le sbarre è positivo, cioè $A(x) \geq 0$
allora le sbarre si levano$\rightarrow |A(x)| = A(x)$

2) Se il polinomio dentro le sbarre è negativo, cioè $A(x) < 0$
allora le sbarre si levano cambiando tutti
i segni del polinomio$\rightarrow |A(x)| = -1 \cdot A(x)$

Una proprietà del valore assoluto è che è zero quando dentro le sbarre c'è zero

$|0| = 0$

$|A(x)| = 0 \Longleftrightarrow A(x) = 0$

Esempio:

1) $|x^2 - 2x| = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2$

2) $|x^2 - 2x| + 1 = 0$
non va risolta, perchè?
somma di due quantità sempre positive
UGUALE A ZERO MAI
L'equazione è impossibile.

2) $|x^2 - 2x| - 1 = 0 \rightarrow |x^2 - 2x| = 1$
questa è un'equazione che ha senso positivo=positivo
Formuletta:

$|A(x)| = k, k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow A(x) = \pm k$

Questa velocizza tanto....

$|x^2 - 2x| = 1 \Longleftrightarrow x^2 - 2x = \pm 1$

una volta + e una volta $-$:

I) $x^2 - 2x = +1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \frac{\triangle}{4} = 1 + 1 = 2 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$

II) $x^2 - 2x = -1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 1}}{1} = 1$

L'insieme delle soluzioni è : $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1\}$

$|A(x)| = B(x)$

3)Risolvere le seguente equazione:
$|x^2 - 2x| + x = 0$

REGOLA GENERALE

• Se il polinomio dentro le sbarre è positivo, cioè $A(x) \geq 0$
allora le sbarre si levano$\rightarrow |A(x)| = A(x)$
• Se il polinomio dentro le sbarre è negativo, cioè $A(x) < 0$
allora le sbarre si levano cambiando tutti
i segni del polinomio$\rightarrow |A(x)| = -1 \cdot A(x)$

Nel nostro caso dentro le sbarre abbiamo $A(x) = x^2 - 2x$
•Se $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow |x^2 - 2x| = x^2 - 2x$
quindi riprendo in mano l'equazione iniziale dove ho isolato
il valore assoluto e la riscrivo senza valore assoluto
$|x^2 - 2x| = -x$ diventa $\rightarrow x^2 - 2x = -x$
Alla fine ho una disequazione da risolvere (condizione del SE...)
E L' EQUAZIONE senza valore assoluto
Conviene risolvere prima la disequazione del SE....
poi risolviamo l'equazione senza valore assoluto e vediamo se la soluzione sta dentro
l'intervallo.
Iniziamo
La condizione del SE è $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2 \rightarrow v.e. \rightarrow$
$x \leq 0 \; o \; x \geq 2$
Risolviamo l'equazione senza v.a. $\rightarrow x^2 - 2x + x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0$
$x = 0, 1$
Grafico
_____0_____1_____2_____
SE...:_____•_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _•_____
-
Lo zero è contemplato nell'intervallo (pallino chiuso)
invece 1 non è contemplato perchè cade nel tratteggiato
quindi la soluzione è solo $x = 0$ del primo SE!
Andiamo adesso al SECONDO SE...
•Se $x^2 - 2x < 0 \rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$
quindi riprendo in mano l'equazione iniziale dove ho isolato
il valore assoluto e la riscrivo senza valore assoluto
$|x^2 - 2x| + x = 0$ diventa $\rightarrow -x^2 + 2x + x = 0$
IDEM:
Alla fine ho una disequazione da risolvere (condizione del SE...)
E L' EQUAZIONE senza valore assoluto
Conviene risolvere prima la disequazione del SE....
poi risolviamo l'equazione senza valore assoluto e vediamo se la soluzione sta dentro
l'intervallo.
Iniziamo

La condizione del SE è $x^2 - 2x < 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2 \rightarrow v.i. \rightarrow$
$0 < x < 2$
Risolviamo l'equazione senza v.a. $\rightarrow -x^2 + 2x + x = 0 \rightarrow -x^2 + 3x = 0$
$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0, 3$
Vediamo la compatibilità con l'intervallo
Grafico
_____0_____2_____
SE...:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ○_____○_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Nè zero e neanche 3, nessuno dei due va bene.
La risposta dell'esercizio:
l'equazione ammette solo la soluzione $x = 0$
_____
Tutte le equazioni con un valore assoluto del tipo | A(x) | =B(x)
si risolvono così.
-
-
Il risultato del valore assoluto è SEMPRE POSITIVO
$| - x^2 - 3x - 4| \geq 0$
non va risolta
LA SOLUZIONE E' $\forall x \in \mathbb{R}$
_____
In modo analogo si ragiona
$|x^2 - x + 4| < 0$
Il risultato del valore assoluto è sempre positivo, quindi NEGATIVO MAI!
LA SOLUZIONE E' Ø (insieme vuoto), disequazione impossibile
_____
Equazioni con più di un valore assoluto
Esercizio:
Risolvere la seguente equazione con due valori assoluti:
$|2x - 1| + |3 - x| = 4x + 4$
•$PRIMA\ IPOTESI$ Se $2x - 1 \geq 0$

allora l'equazione senza il primo valore assoluto diventa:
$2x - 1 + |3 - x| = 4x + 4$
togliere il secondo valore assoluto: •$Prima\ ramificazione\ Se\ 3 - x \geq 0$ allora l'equazione senza il secondo valore assoluto diventa:
$2x - 1 + 3 - x = 4x + 4 \rightarrow x + 2 = 4x + 4 \rightarrow x - 4x = 4 - 2 \rightarrow -3x = 2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$
•$Seconda\ ramificazione\ Se\ 3 - x < 0$ allora l'equazione senza il secondo valore assoluto diventa:
$2x - 1 - 3 + x = 4x + 4 \rightarrow 3x - 4 = 4x + 4 \rightarrow 3x - 4x = 8 \rightarrow -x = 8 \rightarrow x = -8$
-
In sintesi
•prima ramificazione
$\begin{cases} 2x - 1 & \geq 0 \\ 3 - x & \geq 0 \end{cases}$ →l'equazione diventa $2x - 1 + 3 - x = 4x + 4 \rightarrow ... \rightarrow x = -\frac{2}{3}$
•seconda ramificazione
$\begin{cases} 2x - 1 & \geq 0 \\ 3 - x & < 0 \end{cases}$ →l'equazione diventa $2x - 1 - 3 + x = 4x + 4 \rightarrow ... \rightarrow x = -8$
•terza ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & <0 \\ 3-x & \geq 0 \end{cases}$ →l'equazione diventa $-2x+1+3-x=4x+4 \rightarrow -7x=0 \rightarrow x=0$

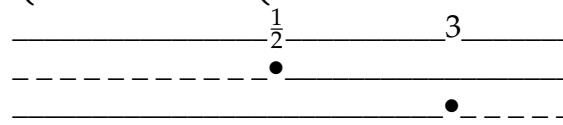
•quarta ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & <0 \\ 3-x & <0 \end{cases}$ →l'equazione diventa $-2x+1-3+x=4x+4 \rightarrow -5x=6 \rightarrow x=-\frac{6}{5}$

Rimangono da fare i 4 sistemi con la compatibilità della soluzioni per vedere se prenderla o scartarla.

•prima ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & \geq 0 \\ 3-x & \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq \frac{1}{2} \\ 3 & \geq x \end{cases} \rightarrow$



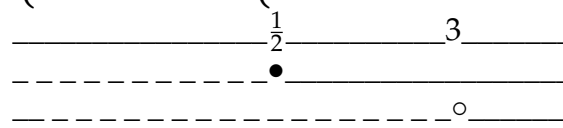
è sistema tratto continuo sopra e sotto: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

La soluzione $x=-\frac{2}{3}$non è accettabile, quindi si scarta!

Passiamo avanti

•seconda ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & \geq 0 \\ 3-x & <0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & \geq \frac{1}{2} \\ 3 & <x \end{cases} \rightarrow$

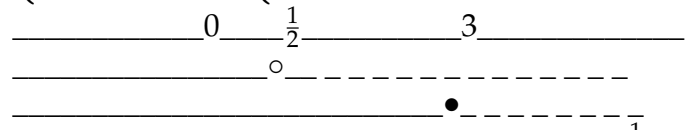


è sistema tratto continuo sopra e sotto: $x>3$

La soluzione $x=-8$ non è accettabile, quindi si scarta!

•terza ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & <0 \\ 3-x & \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & <\frac{1}{2} \\ 3 & \geq x \end{cases} \rightarrow$

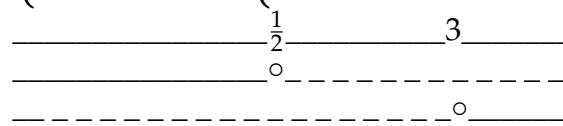


è sistema tratto continuo sopra e sotto: $x<\frac{1}{2}$

La soluzione $x=0$ finalmente ne ho trovata una che è accettabile!

•quarta ramificazione

$\begin{cases} 2x-1 & <0 \\ 3-x & <0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & <\frac{1}{2} \\ 3 & <x \end{cases} \rightarrow$



sistema impossibile

La soluzione dell'esercizio con due valori assoluti è solo $x=0$

Ultimo caso particolare per le equazioni con 2 valori assoluti è l'uguaglianza tra essi

$$|A(x)| = |B(x)| \iff A(x) = \pm B(x)$$

Esercizio:

Risolvere la seguente equazione:

$|3x-x^2| = |-x^2+1|$

diventa $3x-x^2 = \pm(-x^2+1)$

quindi scrivo
I) quella con il più: $3x - x^2 = -x^2 + 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$
II) quella con il meno: $3x - x^2 = +x^2 - 1 \rightarrow -2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow$
$2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \triangle = 9 + 8 = 17 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$
Quindi le soluzioni dell'equazione assegnata sono:
$S = \{\frac{1}{3}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\}$