Lezione del 22-9-2020
martedì 22 settembre 2020 11:02

DISEQUAZIONI

$$P(x) > 0 \qquad (P(x) < 0)$$

Trovare TUTTI I NUMERI $\bar{x}$ che SOSTITUITI al posto di x nell'espressione $P(x)$, rendono VERA la DISUGUAGLIANZA

$$P(\bar{x}) > 0 \qquad (P(\bar{x}) < 0)$$

Risolvere la diseq. $2x - 5 < 0$

PROCEDURA NOTA: (Trattare la DISEQUAZIONE DI I GRADO COME UNA EQUAZIONE)

$2x - 5 < 0 \rightarrow 2x < 5 \rightarrow \boxed{x < \frac{5}{2}}$ e quindi le soluzioni sono

$\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{5}{2}\} =]-\infty, \frac{5}{2}[$

sono tutti i numeri reali x tali che

$-2x - 5 < 0 \longrightarrow -2x < 5 \rightarrow +2x > -5 \rightarrow x > -\frac{5}{2}$

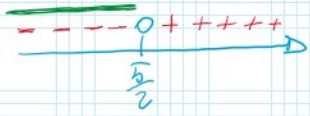
$\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{5}{2}\} =]-\frac{5}{2}, +\infty[$

Seconda Procedura (segno del polinomio)

$2x - 5 \boxed{<} 0$

Studio il segno $2x - 5$ $\Rightarrow$ $2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

$]-\infty, +\frac{5}{2}[= x < \frac{5}{2}$



Studiare la disequazione

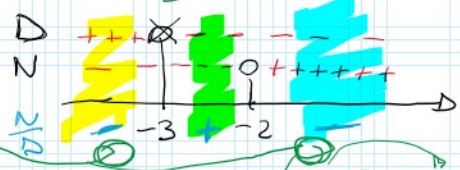
$$\frac{3x+6}{-x-3} \boxed{<} 0$$

Una frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$ è > 0 se $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$
$A(x) < 0$ e $B(x) < 0$

< 0 se $A(x) > 0$ e $B(x) < 0$
$A(x) < 0$ e $B(x) > 0$

Prima di Tutto STUDIO IL SEGNO di $3x+6$ e $-x-3$

SEGNO N: $3x+6$ $\qquad 3x+6 = 0 \rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$



SEGNO D: $-x-3$ $\qquad -x-3 = 0 \rightarrow x = -3$ $\qquad (-x-3 = 0 \quad -3 = x)$

$(-x = 3 \rightarrow +x = -3)$

$\frac{3x+6}{-x-3} \boxed{<} 0 \iff x < -3$ oppure $x > -2$

$$\frac{3x+6}{-x-3} \boxed{<} 0 \iff x<-3 \text{ oppure } x>-2$$

$$]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[$$

Se invece

$$\frac{3x+6}{-x-3} \boxed{\leq} 0 \qquad x<-3 \; ; \; x \geq -2$$

$$]-\infty,-3[\cup [-2,+\infty[$$

Disequazione

$$\underbrace{(-2x+1)}_{F_1}\underbrace{(x^2+x+1)}_{F_2} \boxed{<} 0$$

Prodotto di due fattori F_1 e F_2

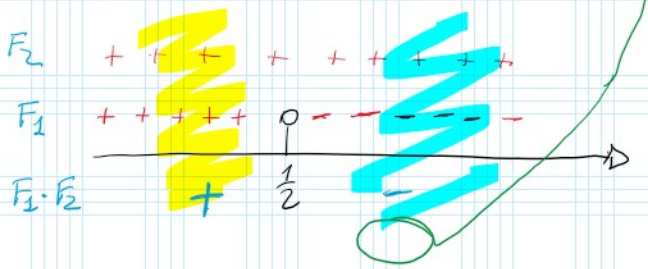
Per studiare il segno di un prodotto, occorre conoscere il segno dei fattori coinvolti

$F_1 \cdot F_2$ — >0 se F_1 e F_2 sono CONCORDI

$F_1 \cdot F_2$ — <0 se F_1 e F_2 hanno segno DISCORDE

Studiamo il segno dei fattori F_1 e F_2

Segno F_1 $-2x+1$ $\qquad -2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$



Segno F_2 x^2+x+1

$$\Delta = 1-4(1)(1) = -3 < 0$$

La disequazione è verificata per le $x > \frac{1}{2}$, $]\frac{1}{2},+\infty[$.

Qualche espressione polinomiale del III ORDINE o di ORDINE SUPERIORE

TEOREMA E REGOLA DI RUFFINI

Sia $P(x)$ un qualsiasi polinomio.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

La quantità $P(\alpha)$ dà il RESTO della DIVISIONE tra il Polinomio $P(x)$ e il binomio $x-\alpha$

Esempio di DIVISIONE TRA POLINOMI

$$(2x^3-5x^2+1) : (x^2-2x+1)$$

SOMMANDO I TERMINI

$$0x^3 - 5x^2 + 1 \quad | \; x^2 - 2x + 1$$

In nero abbiamo eseguito le moltiplicazioni tra il monomio a quoziente e

$(2x^3 - 5x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$

In nero abbiamo eseguito le moltiplicazioni tra il monomio a quoziente e il divisore

SOMMANDO I TERMINI SIMILI

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - 5x^2 + 1 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-2x^3 + 4x^2 - 2x & 2x - 1 \\
\hline
= -x^2 - 2x + 1 & \\
\quad + x^2 - 2x + 1 & \\
\hline
= -4x + 2 &
\end{array}
$$

Quoziente della divisione

IL GRADO È ANCORA PIÙ GRANDE O UGUALE A QUELLO DEL DIVISORE QUINDI SI CONTINUA

è il monomio che moltiplicato per x^2 dà il monomio $2x^3$

è il monomio ... che dà $-x^2$

Mi fermo perché il grado è < di quello del divisore

Resto della divisione

A questo punto:

$$2x^3 - 5x^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(2x - 1) + (-4x + 2)$$

è come

$$
\begin{array}{r|l}
54 & 4 \\
\hline
4 & 13 \\
\hline
14 &
\end{array}
\qquad 54 = 4 \cdot 13 + 2
$$

$12 = 2$

Altro esempio:

$$(x^3 - x + 1) : (x - 3)$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x + 1 & x - 3 \\
\hline
-x^3 + 3x^2 & x^2 + 3x + 8 \\
\hline
= +3x^2 - x + 1 & \\
\quad -3x^2 + 9x & \\
\hline
\quad = +8x + 1 & \\
\qquad -8x + 24 & \\
\hline
\qquad = 25 &
\end{array}
$$

$P(x) = x^3 - x + 1$

$P(+3) = (+3)^3 - (3) + 1 = 27 - 3 + 1 = 25$

Cioè $P(3)$ è il resto della divisione tra $x^3 - x + 1$ e $(x - 3)$

T (di Ruffini)

Se $P(x)$ è un polinomio, allora

1) $P(\alpha)$ è il resto tra $P(x) : (x - \alpha)$ (e quindi $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + P(\alpha)$)

2) Se $P(\alpha) = 0$ allora il polinomio $P(x)$ è DIVISIBILE per $(x - \alpha)$, cioè

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$$

cioè abbiamo scritto $P(x)$ come PRODOTTO

3) Se quindi α è tale che $P(\alpha) = 0$

← cioè abbiamo scritto $P(x)$ come PRODOTTO

3) Se quindi α è tale che $P(\alpha)=0$
allora il polinomio quoziente $Q(x)$ lo otteniamo secondo REGOLA (DI RUFFINI)

utilizzando un esempio:

$P(x)=3x^3-x^2+4$ Vediamo che $P(-1)=3(-1)^3-(-1)^2+4=$
$=-3-1+4=0$

pertanto $3x^3-x^2+4=(x-(-1))\cdot Q(x)$
$=(x+1)\cdot Q(x)$

chi è $Q(x)$

	x^3	x^2	x	noto
	3	-1	0	4
	↓	+	+	
-1		-3	+4	-4
×	3	-4	+4	0 //

sono i coefficienti di $Q(x)$ nell'ordine x^2, x, noto (che è sempre 1 grado meno di $P(x)$)

$Q(x)=3x^2-4x+4$ e quindi $3x^3-x^2+4=(x+1)(3x^2-4x+4)$

Se avessi chiesto:
Risolvere $3x^3-x^2+4\geq 0$ (non si può eseguire con il Δ perché NON è di 2° grado!!!)

Essendo polinomio di III grado, l'unico modo sarebbe quello di scriverlo come PRODOTTO di fattori: (una via è RUFFINI)

Poiché $P(-1)=0$, vedi sopra $3x^3-x^2+4=(x+1)\cdot(3x^2-4x+4)$

studio il segno di $F_1: x+1$ e $F_2: 3x^2-4x+4$

Segno F_1 $x+1$ $x+1=0 \to x=-1$

F_2	+	+	+	+	+	+	+
F_1	−	−	−	0	+	+	+
	−			−1			+

Segno F_2 $3x^2-4x+4$

$\Delta=16-4(3)(4)=\dots<0$

Pertanto $3x^3-x^2+4\geq 0 \iff x\geq -1$; $[-1,+\infty[$

Come calcolare il valore α ??

x^3-2x^2-3x+6. Come calcolare l'eventuale α?

l'eventuale α è un numero tra i DIVISORI del termine

l'eventuale α è un numero tra i DIVISORI del termine noto!

I divisori di 6 sono:

$$\pm 1 \; ; \pm 2 \; , \pm 3 \; ; \pm 6$$

Se tra questi 8, a tentativi, trovo uno tale che $P(\alpha)=0$, allora posso con RUFFINI, altrimenti NON POSSO APPLICARLO!!!

$$P(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 3(1) + 6 = +2 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 6 \neq 0$$

$$P(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 0 \; !!!$$

	1	-2	-3	6
2	↓	+2	0	-6
×	1	0	-3	//

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x-2)(x^2 - 3)$$

$$(x-2)(x^2-3)$$

Per casa

Risolvere

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 < 0 \; ;$$

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2+7x-8} \leq 0 \; ; \quad \frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1} \; ; \quad \frac{x^2+x-2}{x^2-10x+21} < \frac{x-1}{x-3} + \frac{3(x+1)}{x-7}$$

$$\boxed{x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 < 0}$$