Corso Zero
Disequazioni di I e di II grado

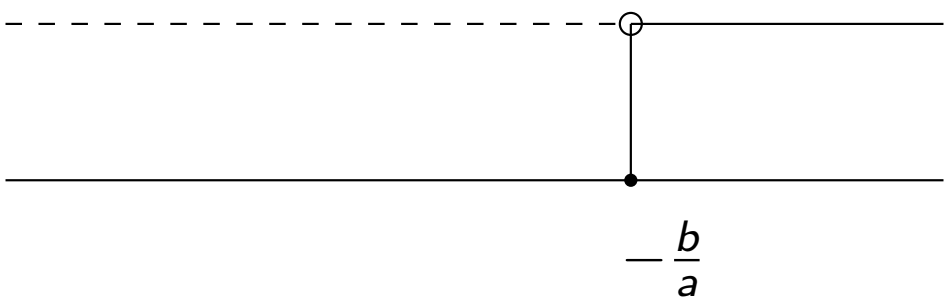
Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

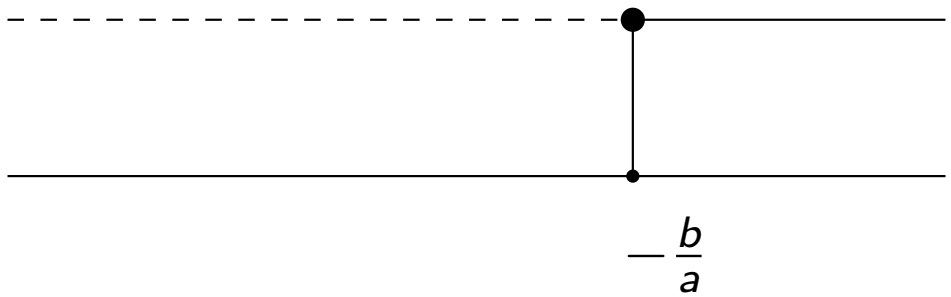
September 22, 2020

Disequazioni di I grado

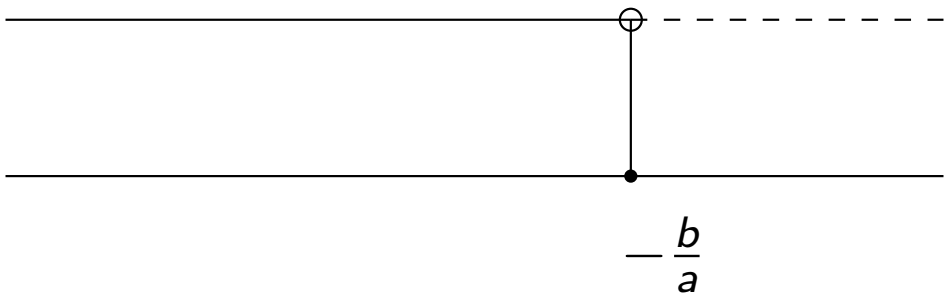
Una disequazione viene detta di primo grado, se, applicando i principi per la risoluzione delle disequazioni, può essere ricondotta a una delle seguenti forme:
$ax + b > 0, ax + b \geq 0, ax + b < 0, ax + b \leq 0$, con $a \neq 0$.
Prima di risolvere la disequazione è opportuno usare i principi di riduzione in modo che il coefficiente a dell'incognita x risulti positivo. Infatti se $a > 0$, partendo ad esempio dalla prima forma, si ha
$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$



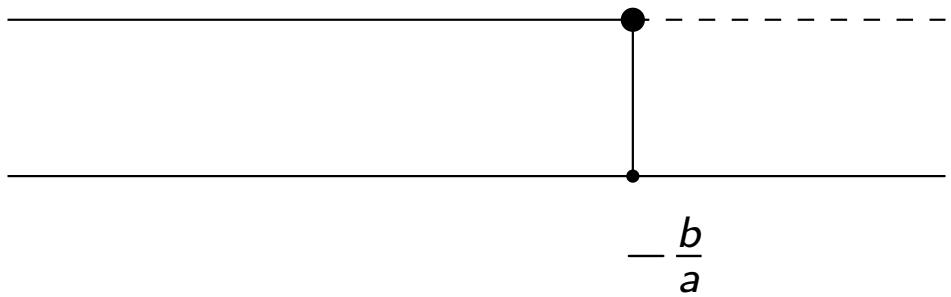
$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$$



$$ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$



$$ax + b \leq 0 \Leftrightarrow ax \leq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$$

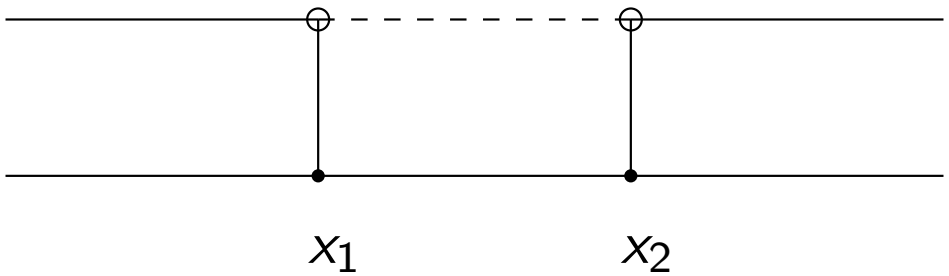


Disequazioni di II grado

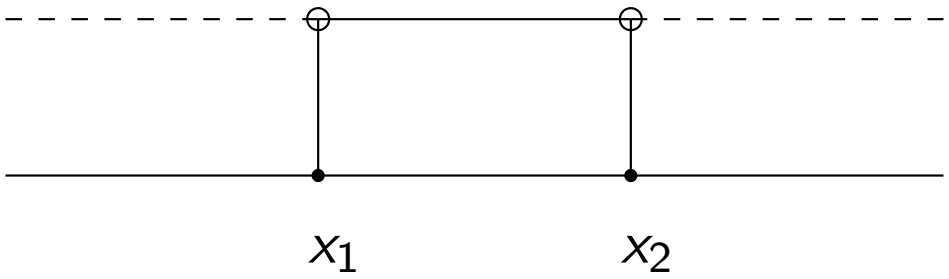
Data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c > 0, < 0$$

1) $\Delta > 0 \rightarrow$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e distinte $x_1 \neq x_2$
Segni concordi $\rightarrow$ valori esterni : $x < x_1 \cup x > x_2$

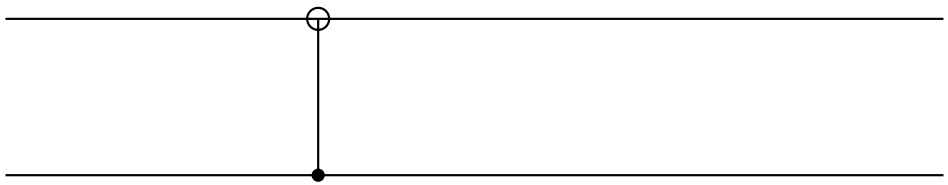


Segni discordi $\rightarrow$ valori interni : $x_1 < x < x_2$



2) $\Delta = 0 \rightarrow$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2$

Segni concordi $\rightarrow$ tutti i numeri tranne x_1 cioè $x \neq x_1$



$x_1 = x_2$

Segni discordi $\rightarrow$ nessuna soluzione

- -

---

3) $\Delta < 0 \rightarrow$ l'equazione associata non ammette soluzioni reali
Segni concordi $\rightarrow$ tutti i numeri cioè $\forall x \in \mathbb{R}$

Segni discordi $\rightarrow$ nessuna soluzione

- -

In modo analogo con le uguaglianze

Data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \leq 0$$

1) $\Delta > 0 \rightarrow$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e distinte $x_1 \neq x_2$
Segni concordi $\rightarrow$ valori esterni :$x \leq x_1 \cup x \geq x_2$
Segni discordi $\rightarrow$ valori interni :$x_1 \leq x \leq x_2$
2) $\Delta = 0 \rightarrow$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2$
Segni concordi $\rightarrow$ tutti i numeri cioè $\forall x \in \mathbb{R}$
Segni discordi $\rightarrow$ solo $x = x_1$
3) $\Delta < 0 \rightarrow$ l'equazione associata non ammette soluzioni reali
Segni concordi $\rightarrow$ tutti i numeri cioè $\forall x \in \mathbb{R}$
Segni discordi $\rightarrow$ nessuna soluzione

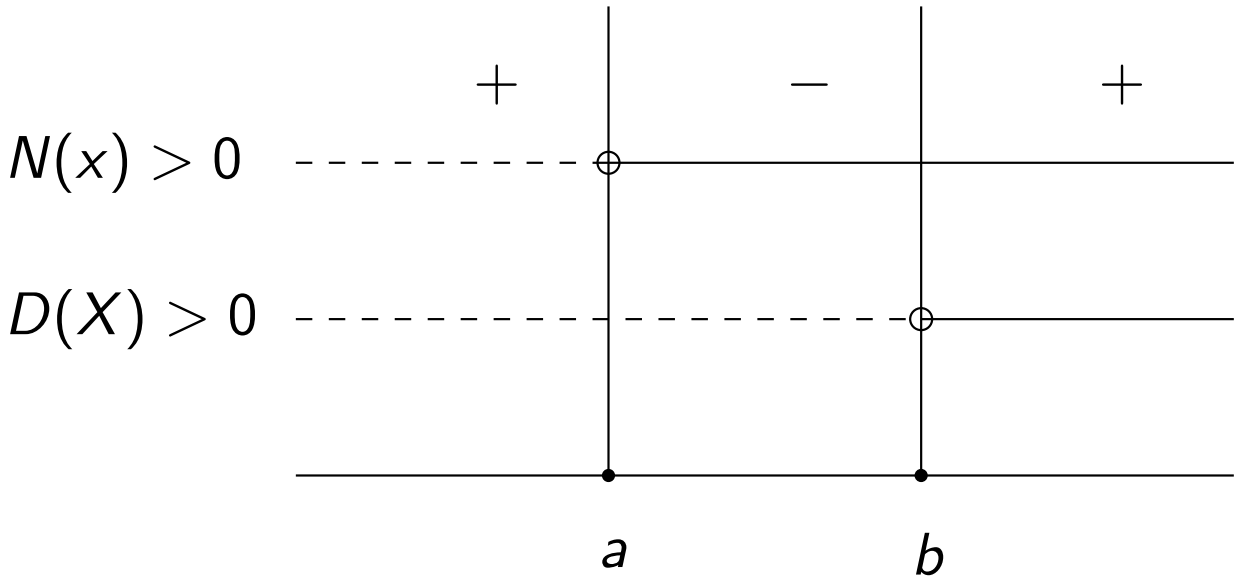
Disequazioni fratte

Proseguiamo lo studio delle disequazioni occupandoci delle disequazioni fratte, cioè di quelle disequazioni che contengono una o più espressioni fratte e in cui l'incognita compare in almeno un denominatore. Faremo prima alcune considerazioni generali e poi restringeremo l'attenzione al caso particolare delle disequazioni lineari fratte.
Ricordiamo che l'espressione $\frac{N(x)}{D(x)}$ ha significato solo per $D(x) \neq 0$.
Utilizzando i principi per la risoluzione delle disequazioni, possiamo sempre riportarci a studiare una delle seguenti forme

- (i) $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$
- (i') $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$
- (ii) $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$
- (ii') $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$

Regole per studiare il segno di un'espressione frazionaria

Una volta riportata la disequazione fratta in una delle quattro forme appena viste, basta ricordare le seguenti tre REGOLE
La frazione $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ ha valore positivo se e solo se N(x) e D(x) hanno lo stesso segno.
La frazione $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ ha valore negativo se e solo se N(x) e D(x) hanno segni opposti.
La frazione $\frac{N(x)}{D(x)} = 0$ si annulla se e solo se si annulla il numeratore.


+
−
+
$N(x) > 0$
$D(X) > 0$
a
b

Vediamo come interpretare queste regole

Forma (i): $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$

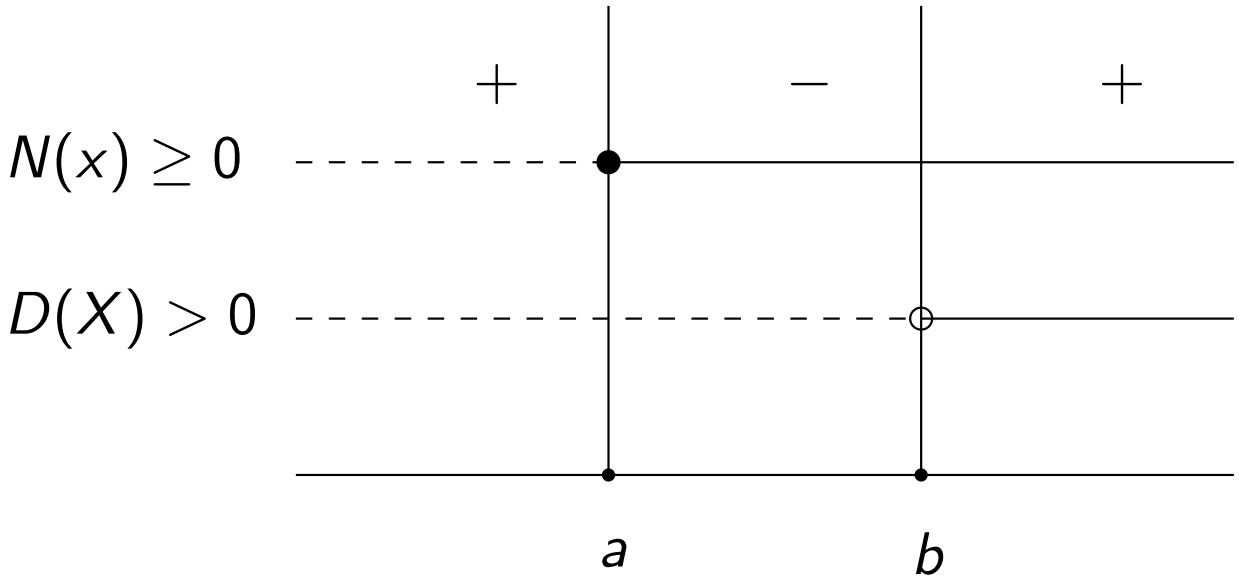
I valori x che risolvono la disequazione sono tutti quelli per cui sia $N(x)$ che $D(x)$ assumono segno positivo, ed anche tutti quelli per cui sia $N(x)$ che $D(x)$ assumono segno negativo.

In poche parole le soluzioni sono date dagli intervalli dove risulta il $+$, cioè facendo riferimento alla nostra figura :

$$x < a \ o \ x > b$$

Forma (i'): $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$

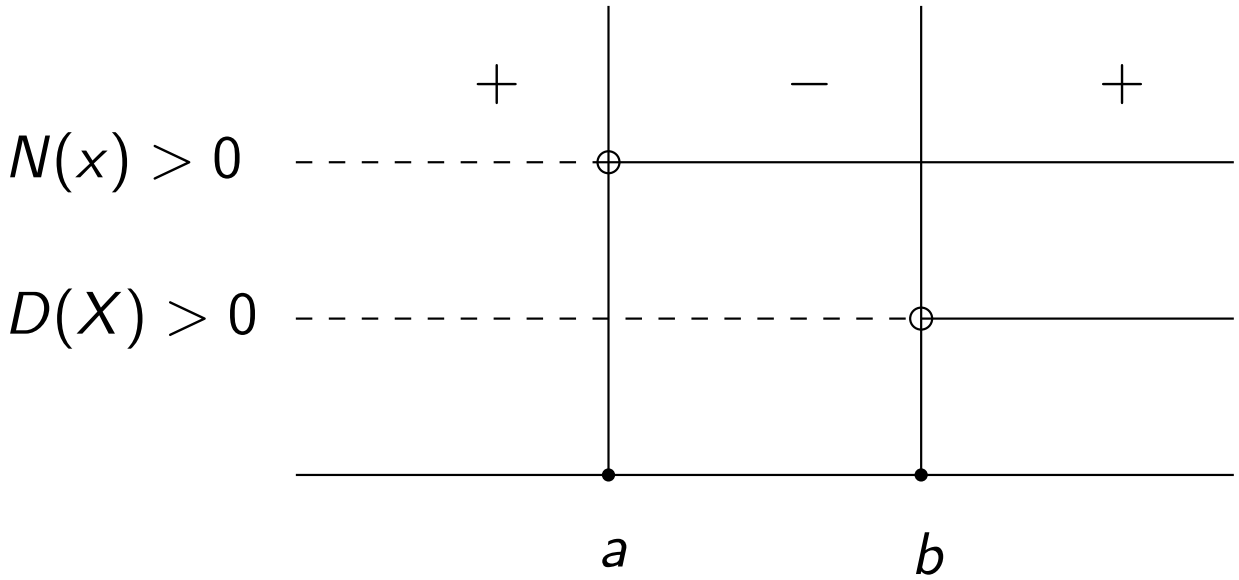
In questo caso, basta aggiungere ai valori x per cui $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ anche i valori che rendono nulla la frazione, cioè che annullano il numeratore.Quindi basta porre $N(X) \geq 0$ e $D(X) > 0$.



$$x \leq a \ o \ x > b$$

Forma (ii): $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$

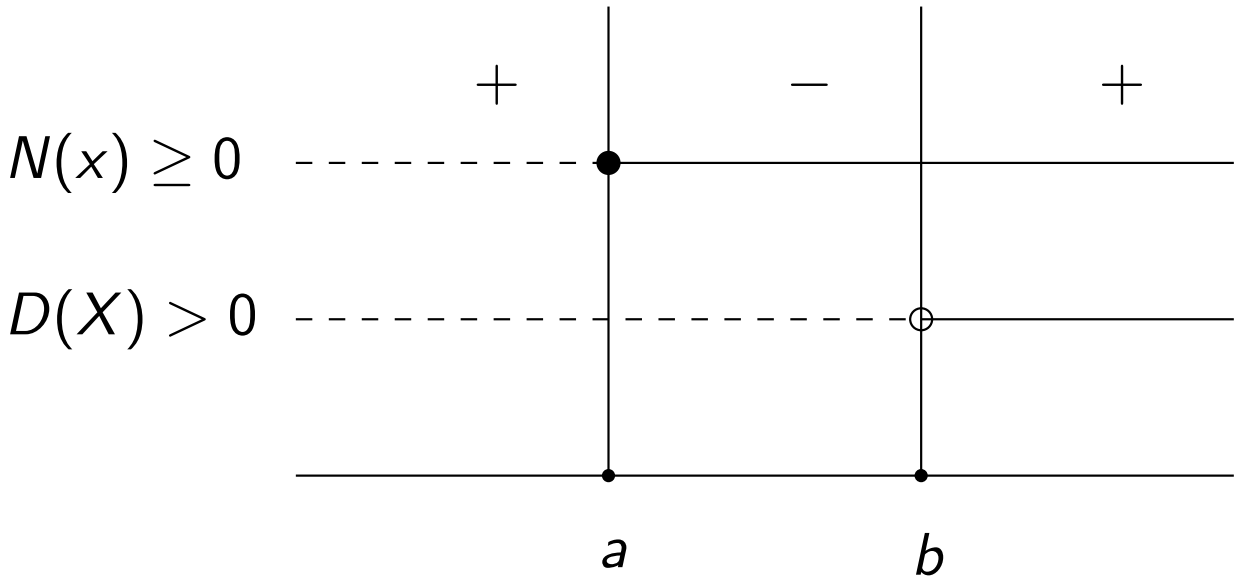
In questo caso, basta porre $N(X) > 0$ e $D(X) > 0$. e poi considerare gli intervalli dove il prodotto dei segni risulta negativo.



$$a < x < b$$

Forma (ii'): $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$

In questo caso, basta porre $N(X) \geq 0$ e $D(X) > 0$. e poi considerare gli intervalli dove il prodotto dei segni risulta negativo.



$$a \leq x < b$$

Sistemi di disequazioni

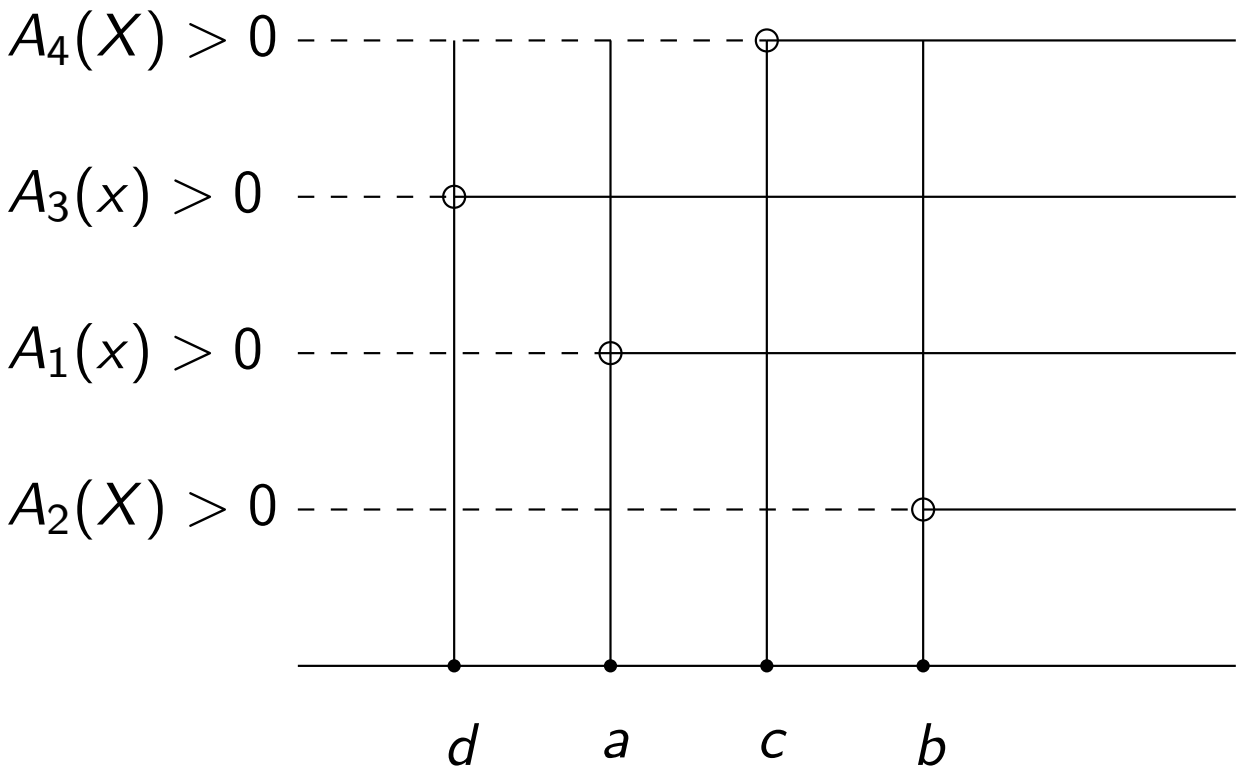
Alla base della risoluzione di un sistema di disequazioni c'è la seguente semplice
REGOLA
un numero è soluzione del sistema se e solo se è soluzione di TUTTE le singole disequazioni.
Questo significa che per risolvere un sistema della forma

$$\begin{cases} A_1(x) > 0 \\ A_2(x) > 0 \\ \dots \\ A_n(x) > 0 \end{cases}$$

dobbiamo
i) risolvere le singole disequazioni separatamente;
ii) considerare l'intersezione degli n insiemi di soluzioni ottenuti.

Diagramma per le soluzioni di un sistema

ATTENZIONE: il significato di questo diagramma non va confuso con quello del diagramma introdotto per le disequazioni fratte.
A) Riportiamo su una retta orizzontale i valori significativi ottenuti studiando le singole disequazioni del sistema.
B) Su una riga sottostante indichiamo con una linea continua solo la zona dove la prima disequazione è soddisfatta, lasciando bianca la zona dove la prima disequazione non è soddisfatta.
C) Stesso lavoro per tutte le altre disequazioni, studiate singolarmente.
D) La risposta: il sistema è soddisfatto solo dagli x che appartengono alle zone in cui tutte le righe sono continue



La soluzione del sistema è

$$x > b$$

ATTENZIONE!: NEL SISTEMA NON SI DEVE FARE IL PRODOTTO DEI SEGNI

Disquazioni di grado superiore al secondo

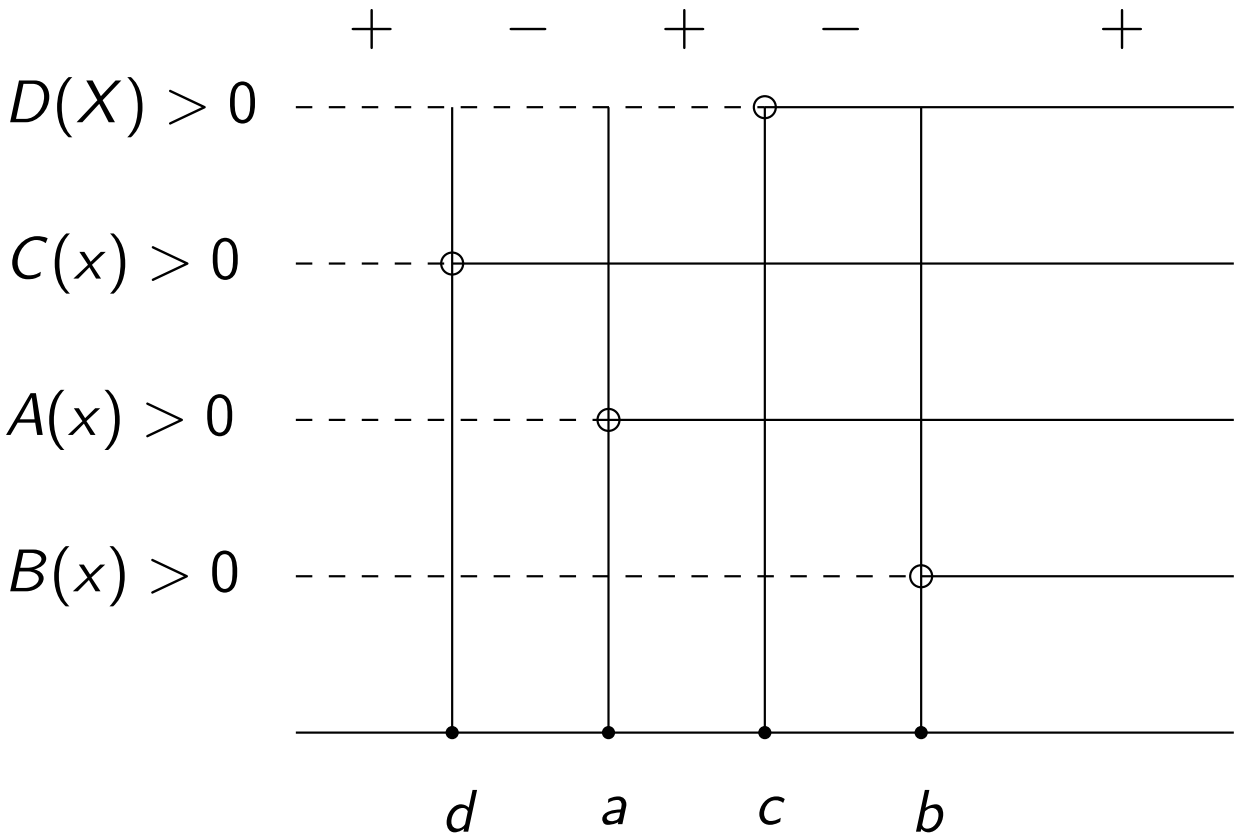
Per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo basta **scomporla** in un'equazione del tipo:

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)D(x) \gtrless 0$$

con $A(x), B(x), C(x), \cdots, F(x)$ polinomio di I o di II grado e porre OGNI fattore maggiore di zero (a prescindere se la disequazione presenta il maggiore o il minore).
Quindi l'elenco delle seguenti disequazioni da risolvere:

$$A(x) > 0, B(x) > 0, C(x) > 0, D(x) > 0$$

Risolverle una alla volta, poi fare un diagramma come quello che abbiamo visto per le disequazioni fratte mettendo in ogni riga i singoli polinomi $(A(x), B(x), C(X), D(x))$ anzichè $N(x)$ e $D(x)$ ed moltiplicare i segni in base al grafico allo stesso identico modo.


+ − + − +
$D(X) > 0$
$C(x) > 0$
$A(x) > 0$
$B(x) > 0$
d a c b

Adesso se la disequazione iniziale presenta il maggiore, cioè

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)D(x) > 0$$

allora le soluzioni da prendere sono gli intervalli con risultato $+$.
Quindi : $x < d, a < x < c, x > b$
Se invece la disequazione iniziale presenta il minore, cioè

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdots F(x) < 0$$

allora le soluzioni da prendere sono gli intervalli con risultato $-$.
Quindi: $d < x < a, c < x < b$

Esempio:

$$(x-1)(x^2-4) > 0$$

Porre $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$
ed inoltre porre uguale a zero anche $x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \; o \; x > 2$
Diagramma e vado a considerare gli intervalli dove il prodotto risulta $+$.
Verificare che le soluzioni della disequazione sono $-2 < x < 1, x > 2$

Svolgi le seguenti equazioni di secondo grado.

- 1) $\frac{9x^2+2}{x^2-5x+6} < 0$
- 2) $\frac{x^2+4x-5}{2x-3} < 0$
- 3) $\frac{-x^2+2x-4}{x^2+8} > 0$
- 4) $\frac{x-3}{x+4} - \frac{x-4}{2} \geq 0$
- 5) $\frac{x^2-7}{2x^2-6x} < \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x-3}$
- 6) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{2x+2} > \frac{1}{6} + \frac{1}{2x-2}$
- 7) $(x-1)(1-\frac{3}{x-1}) < \frac{6-x^2}{1-x}$
- 8) $1 - \frac{x}{2x+4} + \frac{x}{x+2} < \frac{3x^2+8}{2x^2+8x+8}$
- 9) $1 \leq \frac{14}{3(x+2)} + \frac{4}{3x-3}$
- 10) $\frac{3x+1}{3} - \frac{x^2-1}{4x} + \frac{(x+2)(x-3)}{12x} \geq 1$