Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Seminario di Analisi Reale: L'integrale di Riemann riletto da Lebesgue

**Studentessa:**
Alida Mezzanotte

Anno Accademico 2025/2026

# Indice

# Introduzione

# Introduzione

In questi appunti viene presentato uno studio dell'integrale di Riemann e dell'integrale di Lebesgue, con particolare attenzione alle loro proprietà e alle condizioni che caratterizzano l'integrabilità delle funzioni.

Nel primo capitolo vengono richiamate le definizioni fondamentali dell'integrale di Riemann, introducendo gli integrali superiore e inferiore di Darboux e il ruolo delle funzioni a gradini nella costruzione dell'integrale. Successivamente viene introdotto l'integrale di Lebesgue attraverso i concetti di funzione misurabile, funzione semplice e misura di Lebesgue, mettendo in evidenza il diverso approccio utilizzato rispetto alla teoria di Riemann. Nella parte finale del capitolo viene analizzata la relazione tra le due nozioni di integrale e si dimostra che ogni funzione integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue, con coincidenza dei rispettivi valori dell'integrale.

Nel secondo capitolo vengono studiate alcune caratteristiche dell'integrabilità secondo Lebesgue e secondo Riemann. Dopo aver dimostrato un lemma riguardante l'approssimazione di una funzione mediante successioni monotone di funzioni integrabili, si richiamano alcuni risultati preliminari sull'integrabilità delle funzioni misurabili. Tali strumenti vengono poi utilizzati per dimostrare il teorema fondamentale di Lebesgue, che fornisce una caratterizzazione completa delle funzioni integrabili secondo Riemann in termini dell'insieme dei loro punti di discontinuità.

L'esposizione mette così in luce il legame tra le due teorie dell'integrazione e mostra come l'integrale di Lebesgue costituisca una naturale estensione dell'integrale di Riemann.

Acconsento alla pubblicazione

# Capitolo 1

# Proprietà dell'integrale di Riemann e Lebesgue

## 1.1 L'integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Richiamiamo alcune definizioni riguardanti l'integrale di Riemann.

### 1.1.1 Integrale superiore e inferiore di Riemann

Sia $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$, cioè,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Definiamo le somme inferiori e superiori di Darboux per $f$ rispetto a $P$, rispettivamente, come

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(x_i - x_{i-1})$$

e

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \,(x_i - x_{i-1}),$$

dove, per $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\}.$$

Definiamo quindi gli integrali inferiore e superiore di Riemann di $f$ su $[a, b]$, rispettivamente, come

$$(R)\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) \mid P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

e

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) \mid P \text{ partizione di } [a, b]\}.$$

Poiché si assume che $f$ sia limitata e che l'intervallo $[a, b]$ abbia lunghezza finita, si ha:

$$-\infty < \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < +\infty$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono uguali,cioè

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

diciamo che $f$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ e chiamiamo questo valore comune l'integrale di Riemann di $f$ su $[a, b]$. Lo denotiamo con

$$(R)\int_a^b f$$

per distinguerlo temporaneamente dall'integrale di Lebesgue.

Un risultato fondamentale stabilisce che $f$ è Riemann-integrabile su $[a, b]$ se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ ha misura di Lebesgue nulla. In particolare, l'integrabilità secondo Riemann richiede che la funzione sia continua quasi ovunque.

### 1.1.2 Funzioni a gradini

Una funzione reale $\psi$ definita su $[a, b]$ si chiama funzione a gradini se esiste una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ e numeri $c_1, \dots, c_n$ tali che per $1 \le i \le n$,

$$\psi(x) = c_i \quad \text{se } x_{i-1} < x < x_i.$$

Osserviamo che

$$L(\psi, P) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = U(\psi, P).$$

Da ciò e dalla definizione degli integrali superiore e inferiore di Riemann, deduciamo che una funzione a gradini è integrabile secondo Riemann e

$$(R)\int_a^b \psi = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Pertanto, possiamo riformulare la definizione degli integrali inferiore e superiore di Riemann come segue:

$$(R)\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{ (R)\int_a^b \varphi \;\middle|\; \varphi \text{ è una funzione a gradini e } \varphi \le f \text{ su } [a, b] \right\},$$

e

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{ (R)\int_a^b \psi \;\middle|\; \psi \text{ è una funzione a gradini e } \psi \ge f \text{ su } [a, b] \right\}.$$

## 1.2 L'integrale di Lebesgue

Nel presente paragrafo introduciamo l'integrale secondo Lebesgue e alcune sue proprietà fondamentali. A differenza dell'integrale di Riemann, che si basa su partizioni del dominio, l'integrale di Lebesgue viene costruito mediante il concetto di misura e tramite approssimazioni con funzioni semplici.

Nel seguito indicheremo con $m$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile.

### 1.2.1 Funzioni misurabili

Una funzione

$$f : E \to \mathbb{R}$$

si dice misurabile se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$$

è misurabile secondo Lebesgue.

Le funzioni misurabili costituiscono la classe di funzioni su cui viene definito l'integrale di Lebesgue.

### 1.2.2 Funzioni semplici

Una funzione
$$\phi : E \to \mathbb{R}$$
si dice semplice se assume un numero finito di valori reali e può essere scritta nella forma
$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k},$$

dove:

- $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,
- $E_1, \ldots, E_n \subseteq E$ sono insiemi misurabili e a due a due disgiunti,
- $\chi_{E_k}$ è la funzione caratteristica di $E_k$, definita da

$$\chi_{E_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_k, \\ 0 & \text{se } x \notin E_k. \end{cases}$$

Se $\phi \geq 0$, definiamo l'integrale di Lebesgue di $\phi$ su $E$ come
$$\int_E \phi \, dm = \sum_{k=1}^{n} a_k \, m(E_k).$$

Le funzioni semplici costituiscono gli strumenti fondamentali per la costruzione dell'integrale di Lebesgue.

### 1.2.3 Integrale di Lebesgue

Sia
$$f : E \to [0, +\infty]$$
una funzione misurabile non negativa.

Definiamo l'integrale di Lebesgue di $f$ su $E$ mediante
$$\int_E f \, dm = \sup \left\{ \int_E \phi \, dm \;\middle|\; \phi \text{ semplice, } 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Nel caso di una funzione misurabile arbitraria
$$f : E \to \mathbb{R},$$
si definiscono la parte positiva e la parte negativa di $f$:
$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Si ha allora
$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

La funzione $f$ si dice integrabile secondo Lebesgue se
$$\int_E |f| \, dm < +\infty.$$

In tal caso si definisce
$$\int_E f \, dm = \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm.$$

Nel caso di funzioni limitate definite su insiemi di misura finita, l'integrabilità secondo Lebesgue è equivalente alla misurabilità della funzione.

### 1.2.4 Proposizione fondamentale

**Proposizione 1**

Sia $f$ una funzione misurabile non negativa su $E$. Allora

$$\int_E f = 0 \text{ se e solo se } f = 0 \text{ quasi ovunque (q.o) su } E. \tag{1.1}$$

**Dimostrazione** Vedi corso di Istituzione di Analisi Superiore.

## 1.3 Differenza e relazione tra i due integrali

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che l'integrale di Lebesgue si costruisce mediante approssimazione tramite funzioni semplici, mentre l'integrale di Riemann si basa su approssimazioni mediante funzioni a gradini definite su partizioni dell'intervallo. Questa differenza riflette il fatto che l'integrale di Lebesgue dipende dalla misura degli insiemi di livello della funzione, mentre quello di Riemann dipende dalla suddivisione del dominio.

Infine, vale la seguente relazione tra le due nozioni:

### 1.3.1 Teorema 1

Sia $f$ una funzione limitata definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se $f$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, allora è integrabile secondo Lebesgue su $[a, b]$ e i due integrali sono uguali.

**Dimostrazione** L'affermazione che $f$ è integrabile secondo Riemann significa che, ponendo $I = [a, b]$,

$$\sup\left\{\int_I \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ funzione a gradini, } \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_I \psi \,\middle|\, \psi \text{ funzione a gradini, } f \leq \psi\right\}.$$

Per dimostrare che $f$ è integrabile secondo Lebesgue dobbiamo mostrare che

$$\sup\left\{\int_I \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ semplice, } \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_I \psi \,\middle|\, \psi \text{ semplice, } f \leq \psi\right\}.$$

Tuttavia, ogni funzione a gradini è una funzione semplice, in quanto gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono Lebesgue-misurabili;pertanto per tali funzioni l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue coincidono. Pertanto la prima uguaglianza implica la seconda e anche l'uguaglianza tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue. □

Il viceversa non vale in generale; pertanto, l'integrale di Lebesgue costituisce una generalizzazione dell'integrale di Riemann. L'esempio standard è la funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

La funzione caratteristica dei razionali in $[0, 1]$ è Lebesgue-integrabile ma non Riemann-integrabile; quindi senza l'ipotesi di integrabilità secondo Riemann il teorema non vale.

# Capitolo 2

# Caratteristiche dell'integrabilità di Riemann e di Lebesgue

## 2.1 Lemma 1

Siano $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ successioni di funzioni Lebesgue-integrabili su $E$ tali che:

- $\{\varphi_n\}$ è crescente puntualmente q.o,
- $\{\psi_n\}$ è decrescente puntualmente q.o.

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $n$,

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{q.o} \quad \text{su } E.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\psi_n - \varphi_n] \, dm = 0, (*)$$

allora:

- $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to f$ puntualmente quasi ovunque su $E$,
- $f : E \to \mathbb{R}$ è Lebesgue-integrabile,
- e vale
  $$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n \, dm = \int_E f \, dm$$
  e
  $$\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \, dm = \int_E f \, dm$$
  .

### Dimostrazione

Per ogni $x \in E$, definiamo

$$\varphi^*(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \qquad \psi^*(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x).$$

Poiché le successioni di funzioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\varphi_n\}$ sono monotone, le funzioni $\varphi^*$ e $\psi^*$ sono ben definite a meno di insiemi di misura nulla, e sono misurabili poichè ciascuna è il limite puntuale di una successione di funzioni misurabili. Inoltre, abbiamo le disuguaglianze:

$$\varphi_n \leq \varphi^* \leq f \leq \psi^* \leq \psi_n \quad \text{q.o} \quad \text{su } E, \ \forall n. \tag{1}$$

Dalla monotonia e dalla linearità dell'integrale di funzioni misurabili non negative,

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*)\, dm \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)\, dm, \ \forall n.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, e sfruttando l'ipotesi (*) si ha:

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*)\, dm \leq \lim_{n\to\infty} \int_E (\psi_n - \varphi_n)\, dm = 0.$$

Poiché $\psi^* - \varphi^*$ è una funzione non negativa e misurabile e $\int_E (\psi^* - \varphi^*)\, dm = 0$, secondo la Proposizione 1, $\psi^* = \varphi^*$ quasi ovunque su $E$. Ma $\varphi^* \leq f \leq \psi^*$ q.o su $E$. Di conseguenza,

$$\varphi_n \ \to f \quad \text{e} \quad \psi_n \ \to f \quad \text{puntualmente quasi ovunque su } E.$$

Pertanto, $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile. Osservando che, poiché $0 \leq f - \varphi_1 \leq \psi_1 - \varphi_1$ su $E$ e $\psi_1$ e $\varphi_1$ sono integrabili, segue dal criterio di confronto per gli integrali che $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile. Deduciamo dalla disuguaglianza (1) che per ogni $n$,

$$0 \leq \int_E \psi_n\, dm - \int_E f\, dm = \int_E (\psi_n - f)\, dm \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)\, dm$$

e

$$0 \leq \int_E f\, dm - \int_E \varphi_n\, dm = \int_E (f - \varphi_n)\, dm \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)\, dm.$$

Di conseguenza, sfruttando l'ipotesi (*)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\, dm = \int_E f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n\, dm. \quad \square$$

## 2.2 Proposizione

Dal corso di Istituzioni di Analisi Superiore sappiamo che una funzione limita e misurabile su un insieme di misura finita è integrabile secondo Lebesgue.

## 2.3 Teorema 1 (Lebesgue)

*Sia $f$ una funzione limitata sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se e solo se l'insieme dei punti di $[a, b]$ in cui $f$ non è continua ha misura nulla.*

**Dimostrazione.** Supponiamo anzitutto che $f$ sia integrabile secondo Riemann. Dall'uguaglianza tra integrale superiore e inferiore di Riemann su $[a, b]$ deduciamo che esistono successioni di partizioni $\{P_n\}$ e $\{P'_n\}$ di $[a, b]$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \left[U(f, P_n) - L(f, P'_n)\right] = 0,$$

dove $U(f, P_n)$ e $L(f, P'_n)$ sono rispettivamente le somme superiori e inferiori di Darboux. Definiamo:

$$P^*_n := \bigcup_{k=1}^{n} (P_k \cup P'_k)\,.$$

$$P^*_n = \left\{x_0^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\right\}.$$

Per ogni indice $n$, definiamo le due funzioni a gradini:

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{m_n} \left( \inf_{(x_{k-1}^{(n)},\, x_k^{(n)})} f \right) \chi_{(x_{k-1}^{(n)},\, x_k^{(n)})}$$

$$\psi_n := \sum_{k=1}^{m_n} \left( \sup_{(x_{k-1}^{(n)},\, x_k^{(n)})} f \right) \chi_{(x_{k-1}^{(n)},\, x_k^{(n)})}$$

Per definizione delle somme di Darboux,

$$L(f, P_n) = \int_a^b \varphi_n \quad \text{e} \quad U(f, P_n) = \int_a^b \psi_n, \quad \text{per ogni } n$$

Allora $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sono successioni di funzioni integrabili tali che per ogni $n$,

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{su } [a, b].$$

Inoltre $\{\varphi_n\}$ è crescente e $\{\psi_n\}$ è decrescente, perchè ogni $P_{n+1}$ è un raffinamento di $P_n$.

Infine,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [\psi_n - \varphi_n] = \lim_{n\to\infty} \big[U(f, P_n) - L(f, P_n)\big] = 0.$$

Dal **Lemma 1** deduciamo che $\varphi_n \to f$ e $\psi_n \to f$ puntualmente quasi ovunque su $[a, b]$.

L'insieme

$$E := \{x \in [a, b] : \varphi_n(x) \not\to f(x) \quad \text{oppure} \quad \psi_n(x) \not\to f(x)\}$$

ha misura nulla.

Sia

$$E_0 := E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\Big\}.$$

Poiché l'unione di un insieme di misura nulla e di un insieme numerabile ha misura nulla, si ha

$$m(E_0) = 0.$$

Affermiamo che $f$ è continua in ogni punto di $E \setminus E_0$. A tal fine fissiamo

$$x_0 \in E \setminus E_0, \qquad e \quad \varepsilon > 0.$$

Poichè

$$\psi_n(x_0) \to f(x_0), \qquad \varphi_n(x_0) \to f(x_0)$$

possiamo scegliere un numero naturale $n_0$ tale che

$$f(x_0) - \varepsilon < \varphi_{n_0}(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi_{n_0}(x_0) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{1}$$

Poiché

$$x_0 \notin P_{n_0} \implies \exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap P_{n_0} = \varnothing.$$

Ciò implica che

$$\text{se } |x - x_0| < \delta, \text{ allora } \varphi_{n_0}(x_0) = \varphi_{n_0}(x) \leq f(x) \leq \psi_{n_0}(x) = \psi_{n_0}(x_0).$$

Da questa disuguaglianza e dalla disuguaglianza (1) deduciamo che

$$\text{se } |x - x_0| < \delta, \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Quindi $f$ è continua in $x_0$.

Resta da dimostrare il viceversa. Supponiamo che $f$ sia continua quasi ovunque su $[a, b]$. Sia $\{P_n\}$ una qualsiasi successione di partizioni di $[a, b]$ per la quale

$$\lim_{n\to\infty} \text{gap}(P_n) = 0.$$

con gap di una partizione P si definisce la massima distanza tra i punti consecutivi della succesione.

Affermiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \big[U(f,P_n) - L(f,P_n)\big] = 0. \tag{2}$$

Se ciò è verificato, allora dalla seguente stima per l'integrale inferiore e superiore di Riemann,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq [U(f,P_n) - L(f,P_n)],\ \forall n$$

si deduce che $f$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$. .

Per ogni $n$, siano $\varphi_n$ e $\psi_n$ le funzioni a gradini inferiore e superiore associate a $f$ sulla partizione $P_n$.

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{m_n} \left( \inf_{(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})} f \right) \chi_{(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})}$$

$$\psi_n := \sum_{k=1}^{m_n} \left( \sup_{(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})} f \right) \chi_{(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})}$$

Dimostrare (2) equivale a dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [\psi_n - \varphi_n] = 0. \tag{3}$$

L'integrale di Riemann di una funzione a gradini coincide con il suo integrale di Lebesgue. Inoltre, poiché la funzione $f$ è limitata sull'insieme limitato $[a,b]$, le successioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sono uniformemente limitate su $[a,b]$.

Quindi, per il Teorema della Convergenza Limitata, per verificare (3) è sufficiente mostrare che

$$\varphi_n \ \to f \quad e \quad \psi_n \to f$$

puntualmente sull'insieme

$$\left\{ x \in (a,b) : f \text{ è continua in } x \text{ e } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\} \right\}.$$

Sia $x_0$ un tale punto. Mostriamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = f(x_0). \tag{4}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) - \varepsilon/2 < f(x) < f(x_0) + \varepsilon/2 \quad \text{se } |x - x_0| < \delta. \tag{5}$$

Scegliamo un indice $N$ per il quale $\text{gap}(P_n) < \delta$ se $n \geq N$. Se $n \geq N$ e $I_n$ è l'intervallo aperto della partizione determinato da $P_n$ che contiene $x_0$, allora $I_n \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Deduciamo da (5) che

$$f(x_0) - \varepsilon/2 \leq \varphi_n(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi_n(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon/2$$

e quindi

$$0 \leq \psi_n(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \quad \text{e} \quad 0 \leq f(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Pertanto (4) vale e la dimostrazione è completa.

□