Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Giocando con il passaggio al limite sotto il segno d'integrale

Alessia Agata Rapisarda

Corso di Real Analysis tenuto dal professore
Salvatore Angelo Marano

Anno Accademico 2025–2026

Indice

Introduzione

L'integrazione secondo Lebesgue rappresenta uno degli strumenti fondamentali dell'analisi matematica moderna, permettendo di estendere in modo significativo il concetto di integrale rispetto alla teoria di Riemann. In questo elaborato presenteremo gli spazi L^p con le principali proprietà e i teoremi di convergenza fondamentali. Successivamente, mediante il Teorema di Fischer-Riesz si dimostrerà la completezza degli spazi L^p. Ed infine sarà analizzato il teorema inverso del teorema della convergenza dominata, di cui sarà fornita una dimostrazione basata sulle costruzioni sviluppate in precedenza.

Capitolo 1

Spazi L^p

In questo primo capitolo verranno introdotti gli spazi di Lebesgue, insieme alle loro principali proprietà e ai relativi teoremi, di cui sarà fornito solo l'enunciato. Per le dimostrazioni si rimanda al corso di *Real Analysis*.

1.1 Spazi L^p, $1 \leq p < \infty$

Definizione 1.1. Siano (S, $\mathcal{F}, \mu_\sigma$) uno spazio mensurale σ-finito, $X \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ funzione $\mu-$misurabile e $1 \leq p < \infty$. Allora esiste

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq +\infty.$$

Definizione 1.2. Diciamo che f è f *p-sommabile* in X quando

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu < +\infty.$$

Osservazione 1.1. Osserviamo che presi due numeri reali $a, b \geq 0$,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \leq 2 \max\{|a|, |b|\}.$$

Dunque

$$|a+b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right). \tag{1.1}$$

Denotiamo con $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ la famiglia delle funzioni p-sommabili in X, vale a dire

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \text{ } \mu\text{-misurabile} \mid \|f\|_p < +\infty\}.$$

È noto che:

1. Dalla disugaglianza (1.1) e dalla linearità dell'integrale si ottiene che $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ è uno spazio vettoriale reale;
2. presi $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, diciamo che $f \sim g$ quando $f(x) = g(x)$ μ-q.o. in X.

Definizione 1.3. Definiamo così l'insieme quoziente

$$L^p(X, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mu)/\!\sim$$

che non è altro che l'isieme delle funzioni p-sommabili in X, in cui identifichiamo fra loro le funzioni che coincidono q.o. in X. Si verifica che $\|\cdot\|_p$ è una norma su $L^p(X, \mu)$. Dunque $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato per $p \geq 1$.

1.2 Lo spazio L^∞

Definizione 1.4. Una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ si dice essenzialmente limitata se esiste $k \geq 0$ tale che

$$|f(x)| \leq k \quad \mu - q.o. \text{ in } X.$$

Definizione 1.5. Denotiamo con $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni essenzialmente limitate in X. Identificando con la relazione d'equivalenza, come nel caso precedente, le funzioni che sono uguali $q.o.$ in X, si ottiene lo spazio vettoriale reale $L^{\infty}(X, \mu)$.

Definizione 1.6. Se $f \in L^{\infty}(X, \mu)$, allora poniamo

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{k \geq 0 : |f(x)| \leq k \ \mu - q.o. \text{ in } X\}.$$

Si dimostra che $\|\cdot\|_{\infty}$ è una norma in $L^{\infty}(X, \mu)$. Dunque $(L^{\infty}(X, \mu), \|\cdot\|_{\infty})$ è uno spazio normato.

1.3 Disuguaglianze di Young, Hölder e Minkowski

Definizione 1.7. Siano $p, q > 1$. Diciamo che p e q sono esponenti coniugati quando

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Young)**.** Siano $p, q > 1$ esponenti coniugati. Allora presi $a, b \geq 0$, si ha:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.2 (Disuguaglianza di Hölder)**.** Siano $p, q > 1$ esponenti coniugati. Se $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$ allora $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ e risulta

$$\|fg\| \ \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Teorema 1.3 (Disuguaglianza di Minkowski)**.** Sia $p \geq 1$. Se $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ allora

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

1.4 Teoremi per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale

In seguito riporteremo alcuni teoremi fondamentali che forniscono delle condizioni sufficienti per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, basati su diverse proprietà della successione, quali la monotonia, la dominazione e il confronto. Tali risultati costituiscono uno strumento essenziale per lo studio della convergenza di successioni di integrali, trovando ampia applicazione in numerosi contesti dell'analisi matematica e delle sue applicazioni.
Da ora in poi $(S, \mathcal{F}, \mu_\sigma)$ è uno spazio mensurale σ-finito, mentre $X \in \mathcal{F} \backslash \{\varnothing\}$.

Teorema 1.4 (Teorema di Beppo Levi o della convergenza monotona)**.** Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mu)$ una successione di funzioni tale che

1. $f_n \leq f_{n+1} \quad q.o$ in X;
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu < \infty$.

Allora

- $f_n \to f \quad \mu - q.o.$ in X;
- $f \in L^1(X)$;
- $\displaystyle\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$, cioè $f_n \to f$ in $L^1(X, \mu)$.

Teorema 1.5 (Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata)**.** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in X e tali che

1. $f_n \to f \quad q.o$ in X;
2. $\exists g \in L^1(X, \mu)$ tale che, per ogni n, $\quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad q.o.$ in X.

Allora $f \in L^1(X, \mu)$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Osservazione 1.2. La condizione di convergenza, $f_n \to f$ in L^1, è sufficiente a garantire il passaggio al limite sotto il segno di integrale, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Infatti, per linearità e monotonia dell'integrale, risulta:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

Dunque

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

Lemma 1.1 (Lemma di Fatou)**.** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in X e tale che

1. per ogni n, $f_n \geq 0 \quad q.o$ in X;
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu < \infty$.

Per $q.o.$ $x \in X$, poniamo $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Allora, $f \in L^1(X, \mu)$ e

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.6 (Teorema del confronto in L^1)**.** Siano $(S, \mathcal{F}, \mu_\sigma)$ uno spazio mensurale σ-finito, $X \in \mathcal{F} \backslash \{\varnothing\}$ e $\{f_n\}, \{g_n\}, \{h_n\}$ tre successioni di funzioni misurabili in X e tali che

$$f_n \leq g_n \leq h_n \quad \mu - q.o.\text{in } X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Se $f_n \to f$ in $L^1(X, \mu)$ e $h_n \to f$ in $L^1(X, \mu)$ allora anche

$$g_n \to f \quad \text{ in } L^1(X, \mu).$$

Dimostrazione. L'ipotesi (1.2) assicura che

$$g_n - f \le h_n - f \quad \text{e} \quad f - g_n \le f - f_n,$$

da cui

$$-(f_n - f) \le g_n - f \le h_n - f$$

q.o. in X e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando ai moduli, si maggiora con il massimo:

$$|g_n - f| \le \max\{\, |f_n - f|,\ |h_n - f|\, \}.$$

Poiché per ogni $a, b \ge 0$ vale

$$\max\{a, b\} \le a + b,$$

si ha

$$|g_n - f| \le |f_n - f| + |h_n - f|.$$

Integrando su X otteniamo

$$\int_X |g_n - f|\, d\mu \le \int_X |f_n - f|\, d\mu + \int_X |h_n - f|\, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, e utilizzando le ipotesi $f_n \to f$ e $h_n \to f$ in $L^1(X, \mu)$, si ottiene la tesi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |g_n - f|\, d\mu = 0,$$

ossia $g_n \to f$ in L^1. $\square$

Lemma 1.2 (Lemma di Pratt)**.** Siano $\{f_n\}, \{g_n\}, \{h_n\}$ tre successioni di funzioni di $L^1(X,\mu)$ tali che

$$f_n \leq g_n \leq h_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \mu - q.o. \text{ in } X.$$

Supponiamo

$$f_n \to f, \quad g_n \to g \quad \text{e} \quad h_n \to h \quad q.o. \text{ in } X,$$

e inoltre

$$f_n \to f \quad \text{e} \quad h_n \to h \quad \text{in } L^1.$$

Allora

$$g_n \to g \text{ in } L^1.$$

Dimostrazione. Siccome $f_n \to f$ in $L^1(X,\mu)$ e $h_n \to h$ in $L^1(X,\mu)$, ne segue, per l'osservazione 1.2, che esisteranno i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X h \, d\mu.$$

Essendo $h_n - g_n \geq 0$, il Lemma 1.1 (di Fatou) assicura che

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (h_n - g_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (h_n - g_n) \, d\mu.$$

Da

$$h_n - g_n \to h - g \quad q.o. \text{ in } X,$$

usando le proprietà del limite massimo e limite minimo, otteniamo

$$\int_X (h - g) \, d\mu \leq \int_X h \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu.$$

Dunque
$$\int_X g\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu. \tag{1.3}$$
Sempre per ipotesi risulta $g_n - f_n \geq 0$ e

$$g_n - f_n \to g - f \quad q.o. \text{ in } X.$$

Procedendo in maniera analoga, per il Lemma 1.1 (di Fatou) si ha

$$\int_X (g-f)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n - f_n)\, d\mu \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int_X g\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu.$$
Pertanto
$$\int_X g\, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu. \tag{1.4}$$
Tramite le (1.3) e (1.4) abbiamo

$$\int_X g_n\, d\mu \to \int_X g\, d\mu.$$

Ottenendo inoltre $f \leq g \leq h$, risulta $g \in L^1(X,\mu)$. Sappiamo inoltre che le funzioni integrali di $|g_n - g|$ sono EAC-C, vale a dire che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ed $\exists L \in \mathcal{F}_X$ con $\mu(L) < +\infty$ tali che, $\forall Y \in \mathcal{F}_X$ con $\mu(Y \cap L) < \delta$, si ha

$$\int_Y |g_n - g|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il teorema di Vitali implica la tesi, ossia

$$g_n \to g \quad \text{ in } L^1.$$

$\square$

Osservazione 1.3. Il Lemma 1.2 (di Pratt) può essere visto come un'estensione del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Infatti, mentre quest'ultimo richiede l'esistenza di una funzione dominante in L^1 indipendente da n, il lemma di Pratt sostituisce tale ipotesi con la presenza di due successioni $\{f_n\}$ e $\{h_n\}$, convergenti in L^1, che controllano inferiormente e superiormente g_n.

Capitolo 2

L^p è uno Spazio di Banach

In questo capitolo vedremo che lo spazio normato $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ è completo per ogni $p \in [1, +\infty]$, e quindi è uno spazio di Banach. La dimostrazione fornisce una costruzione che sarà utile nel seguito per provare il teorema inverso del teorema della convergenza dominata.
Ricordiamo innanzitutto alcuni concetti preliminari, dove, come al solito, $(S, \mathcal{F}, \mu_\sigma)$ è uno spazio mensurale σ-finito, $X \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ e $L^p = L^p(X,\mu)$.

Definizione 2.1. Siano $p \geq 1$, $\{f_n\} \subseteq L^p$ ed $f \in L^p$. Diremo che $f_n \to f$ in L^p quando

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Mentre $\{f_n\}$ si dice di Cauchy in L^p quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n \geq \nu \quad \text{risulta} \quad \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Proposizione 2.1. Ogni successione convergente in $L^p(X,\mu)$ è di Cauchy.

Proposizione 2.2. Ogni successione di Cauchy converge se possiede una sottosuccessione convergente.

Definizione 2.2. La successione $\{f_n\} \subseteq L^p$ si dice rapidamente di Cauchy se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_p < +\infty$$

Proposizione 2.3. Ogni successione rapidamente di Cauchy è di Cauchy.

Proposizione 2.4. Ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione rapidamente di Cauchy.

2.1 Teorema di Fischer-Riesz

Teorema 2.1 (Fischer-Riesz)**.** Siano $p \geq 1$ e $\{f_n\} \subseteq L^p(X, \mu)$. Allora sono equivalenti:

1. La successione $\{f_n\}$ converge in L^p;

2. La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in L^p.

In particolare, dal teorema si ottiene che L^p è uno spazio di Banach per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$.

Dimostrazione. Trattiamo solo il caso $1 \leq p < \infty$.
($\Rightarrow$) Si ottiene direttamente dalla proposizione 2.1.
($\Leftarrow$) Per ipotesi $\{f_n\}$ è di Cauchy in L^p, cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, n \geq \nu \quad \text{risulta} \quad \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Dalla proposizione 2.2 basta una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergente in L^p. Sfruttando la proposizione 2.4, otteniamo una sottosuccessione del tipo

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1,$$

la quale è rapidamente di Cauchy in L^p. Infatti, passando alle serie si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Per semplificare la notazione, scriviamo f_k al posto di f_{n_k}, in modo che

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1. \tag{2.1}$$

L'idea è quella di costruire esplicitamente la funzione limite $f \in L^p$, ponendo:

$$f = f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1} - f_k).$$

1° step. Definiamo gli incrementi della successione

$$g_k := f_{k+1} - f_k$$

in modo che, per ogni n, si ha

$$f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1} - f_k) \quad \text{cioè} \quad f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

2° step. Consideriamo le somme parziali

$$G_n := \sum_{k=1}^{n} |g_k| = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|,$$

La successione $\{G_n\}$ è non decrescente e non negativa. Inoltre, passando alla norma in L^p, usando la disuguaglianza di Minkowski (Teorema 1.3) e la

(2.1) si ottiene:

$$\|G_n\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Quindi

$$\|G_n\|_p \leq 1 \tag{2.2}$$

Da questa stima segue che $\{G_n\}$ è limitata superiormente in L^p e per il Teorema 1.4 (convergenza monotona) esiste il limite

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \in L^p.$$

e

$$G_n(x) \to g(x) \quad \text{q.o. in } X.$$

In particolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \infty \quad \text{q.o.}, \tag{2.3}$$

quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ converge assolutamente quasi ovunque.

3° step. Definiamo

$$f := f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k.$$

Questa definizione è ben posta per la (2.3). Mostriamo che $f_n \to f$ in L^p. Per ogni n,

$$f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k, \quad \Rightarrow \quad f - f_n = \sum_{k=n}^{\infty} g_k.$$

Questa scrittura è ben definita grazie alla convergenza assoluta quasi ovunque della serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$, garantita dalla (2.3). Ciò si ottiene nel seguente modo:

$$f = f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \lim_{m\to\infty} \left(f_1 + \sum_{k=1}^{m} g_k \right),$$

mentre

$$f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k.$$

Allora

$$f - f_n = \lim_{m\to\infty} \left(f_1 + \sum_{k=1}^{m} g_k \right) - \left(f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k \right).$$

Semplificando si ottiene

$$f - f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} g_k - \sum_{k=1}^{n-1} g_k \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} g_k.$$

Pertanto

$$f - f_n = \sum_{k=n}^{\infty} g_k.$$

Passando alla norma in L^p, usando la disuguaglianza di Minkowski (Teorema 1.3) e la (2.1) si ottiene la tesi

$$\|f - f_n\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0,$$

cioè

$$f_n \to f \quad \text{in } L^p.$$

□

Osservazione 2.1. Dalla dimostrazione del teorema precedente si ottiene che da ogni successione $f_n \to f$ in L^p, è possibile costruire una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad q.o.$$

Capitolo 3

Teorema inverso del teorema della convergenza dominata

Concludiamo l'elaborato enunciando e dimostrando il teorema inverso del teorema della convergenza dominata di Lebesgue, che evidenzia l'importante legame tra la convergenza in L^p e la convergenza puntuale quasi ovunque, permettendo di ottenere, a partire dalla convergenza in L^p, una sottosuccessione convergente quasi ovunque e dominata da una funzione sommabile.

3.1 Teorema Inverso del teorema della convergenza dominata

Teorema 3.1. Siano (S, $\mathcal{F}, \mu_\sigma$) uno spazio mensurale σ-finito, $X \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ e $p \geq 1$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p$ e sia $f \in L^p$ tale che $\|f_n - f\|_p \to 0$. Allora esistono $\{f_{n_k}\}$ sottosuccessione e $h \in L^p$ tali che:

- $f_{n_k} \to f \quad q.o.$ in X;
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad q.o.$in X.

Dimostrazione. L'ipotesi $f_n \to f$ in L^p, implica, per l'osservazione 2.1, che

$$\exists \{f_{n_k}\} \text{ tale che } f_{n_k}(x) \to \hat{f}(x) \quad q.o. \text{in } X, \text{ con } \hat{f} \in L^p.$$

Per semplificare la notazione, poniamo $f_{n_k} := f_k$. Dobbiamo dimostare che la sottosuccessione è dominata da una funzione di L^p. Rifacendosi al Teorema 2.1, per ogni k, si ha

$$f_k = f_1 + \sum_{j=1}^{k-1} g_j \quad \text{con} \quad g_j := f_{j+1} - f_j.$$

Definiamo la funzione dominante, ponendo:

$$h(x) := |f_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)|.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$|f_k(x)| \leq |f_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_j(x)| \leq |f_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| = h(x),$$

cioè $\quad |f_k(x)| \leq h(x) \quad q.o.X$. Verifichiamo che $h \in L^p$. Distinguiamo due casi:

<u>1° caso</u>: $p \geq 1$. Passando alla norma L^p, usando la disuguaglianza di Minkowski (Teorema 1.3) e la (2.3) si ottiene

$$\|h\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty.$$

2° caso: $p = \infty$. Basta osservare che, per la (2.3),

$$\|h\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |h(x)| \leq \|f_1\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_\infty < \infty.$$

Dunque $h \in L^p$.

Abbiamo quindi costruito una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ tale che:

- $f_{n_k} \to \hat{f} \quad q.o.$ in X;
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k, q.o.$ in X.

Infine, essendo per ipotesi $f_n \to f$ in L^p e avendosi pure $f_{n_k} \to \hat{f} \quad q.o.$ l'unicità del limite assicura che

$$\hat{f} = f \quad q.o. \text{ in } X.$$

Pertanto, la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge quasi ovunque ad f ed è dominata dalla funzione $h \in L^p$.

□

Consenso alla pubblicazione

La sottoscritta autorizza la pubblicazione del presente elaborato sul sito del DMI UNICT.