

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Da povero a ricco:
La regolarizzazione in L^p**

Studente:

Francesco Puglisi

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	2
1 Proprietà della Convoluzione	3
2 Mollificatori	11

Introduzione

In questi appunti vengono trattati alcuni degli strumenti fondamentali dell'Analisi Funzionale: l'operazione di convoluzione e la teoria dei mollificatori.

La prima parte del lavoro si concentra sulle proprietà della convoluzione, con particolare attenzione alla regolarità del prodotto convolutivo. Si dimostrerà come tale operazione permetta di "ereditare" la regolarità di uno dei due fattori, rendendo la convoluzione l'operatore di regolarizzazione per eccellenza.

Nella seconda parte vengono introdotti i mollificatori (o successioni regolarizzanti). L'obiettivo principale è mostrare come sia possibile approssimare funzioni appartenenti agli spazi L^p mediante funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto (C_c^∞). Questi risultati di densità costituiscono il ponte necessario per l'estensione di molti teoremi classici dell'analisi a spazi funzionali più generali, ponendo le basi per lo studio delle derivate deboli e degli spazi di Sobolev.

Capitolo 1

Proprietà della Convoluzione

TEOREMA 1

Ipotesi: Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$.

Tesi: Per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su \mathbb{R}^n e, posto

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$$

DIMOSTRAZIONE (1° CASO: $p = 1$)

Consideriamo la funzione $F(x, y) = |f(x-y)g(y)|$ definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Calcoliamo l'integrale doppio sfruttando il Teorema di Tonelli e il fatto che l'integrale di Lebesgue è invariante per traslazione:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \|f\|_1 dy \\ &= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

Essendo l'integrale doppio finito, la funzione $F(x, y)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Allora, per il TEOREMA DI FUBINI, ne segue che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione:

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ è sommabile su } \mathbb{R}^n$$

2° CASO ($1 < p < +\infty$)

Consideriamo $q = p/(p-1)$ l'esponente coniugato di p . Per quanto abbiamo dimostrato nel Caso 1, risulta che la funzione $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ è integrabile su \mathbb{R}^n per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ (essendo convoluzione di due funzioni L^1).

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} |f(x-y)||g(y)| &= |f(x-y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} |g(y)| \\ &= \left(|f(x-y)|^{1/p} \cdot |g(y)| \right) \cdot |f(x-y)|^{1/q} \end{aligned}$$

Da ciò segue, considerando che la funzione $\psi(y) = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^n)$ per q.o. x e applicando la disuguaglianza di HÖLDER :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \right) \cdot |f(x-y)|^{1/q} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{1/p} \cdot \|f\|_1^{1/q} \end{aligned}$$

Poiché entrambi i fattori sono finiti per q.o. x , l'integrale $\int |f(x-y)g(y)| dy$ è finito. Pertanto la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è sommabile su \mathbb{R}^n .

Adesso consideriamo:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right|^p \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| dy \right)^p \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right) \cdot \|f\|_1^{p/q} \end{aligned}$$

Cioè:

$$|(f * g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/q} \cdot (|f| * |g|^p)(x)$$

Per il Caso 1 concludiamo con:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &\leq \|f\|_1^{p/q} \cdot \| |f| * |g|^p \|_1 \\ &\leq \|f\|_1^{p/q} \cdot (\|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p) \end{aligned}$$

Cioè:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$$

3° CASO ($p = \infty$)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per definizione di norma L^∞ , sappiamo che per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ risulta:

$$|g(y)| \leq \|g\|_\infty$$

Consideriamo il modulo della convoluzione:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot \|g\|_\infty dy \\ &= \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy \end{aligned}$$

Sfruttando nuovamente l'invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue ($\int |f(x-y)| dy = \|f\|_1$), otteniamo:

$$|(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

Poiché la stima sopra vale quasi ogni x , il valore della convoluzione è limitato uniformemente da una costante. Passando all'estremo superiore essenziale rispetto a x , si ha:

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

In particolare, l'integrale converge assolutamente per ogni x , essendo che $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, quindi la funzione è ovunque ben definita e limitata. \square

Proposizione 1.2

Ipotesi: Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, dove p' è l'esponente coniugato di p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Tesi: Vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} * h)$$

dove $\check{f}(x) = f(-x)$.

DIMOSTRAZIONE

Definiamo la funzione di due variabili $F(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$. Per poter scambiare l'ordine di integrazione, dobbiamo prima assicurarci che $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Usando il Teorema di Tonelli e la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| (|f| * |g|)(x) dx \end{aligned}$$

Per il Teorema 1.1, sappiamo che $(|f| * |g|) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Poiché $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, per la disuguaglianza di Hölder il prodotto è sommabile:

$$\|h \cdot (|f| * |g|)\|_1 \leq \|h\|_{p'} \| |f| * |g| \|_p \leq \|h\|_{p'} \|f\|_1 \|g\|_p < \infty$$

Quindi $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e possiamo applicare il Teorema di Fubini.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x) h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \right) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) h(x) dx \right) dy \end{aligned}$$

Nell'integrale interno rispetto a x , effettuiamo il cambio di variabile $z = x - y$, da cui $x = y + z$ e $dx = dz$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(z) h(y+z) dz$$

Notiamo che $h(y+z) = h(y - (-z))$. Se definiamo $\check{f}(t) = f(-t)$, l'integrale diventa:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(-z) h(y - (-z)) dz$$

Cambiando ulteriormente variabile $w = -z$, otteniamo proprio la definizione di convoluzione tra \check{f} e h :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \check{f}(w) h(y-w) dw = (\check{f} * h)(y)$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale principale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(y) (\check{f} * h)(y) dy$$

L'uguaglianza è così dimostrata. \square

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Sia \mathcal{A} la famiglia di tutti gli insiemi aperti $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $f = 0$ quasi ovunque su U , ovvero:

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq \mathbb{R}^n : U \text{ è aperto e } f(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in U\}$$

Definiamo l'aperto massimale di annullamento W come l'unione di tutti gli elementi di \mathcal{A} :

$$W = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$$

Si definisce supporto essenziale di f il complementare di W :

$$\text{supp } f = \mathbb{R}^n \setminus W$$

Perché questa definizione? La definizione usuale $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ non va bene quando lavoriamo con classi di equivalenza. Infatti, se $f_1 = f_2$ q.o. in \mathbb{R}^n , dovrebbe essere $\text{supp } f_1 = \text{supp } f_2$, oppure dovrebbero differire solo per un insieme di misura nulla.

Proposizione 1.3

Ipotesi Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Tesi

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$$

dove $\text{supp } f + \text{supp } g = \{x + y : x \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g\}$.

Dimostrazione

Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $y \mapsto f(x - y)g(y)$ sia integrabile. Si ha:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \int_{(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g} f(x - y)g(y) dy$$

L'integrando è diverso da zero solo se accadono:

- $y \in \text{supp } g$
- $x - y \in \text{supp } f \implies y \in x - \text{supp } f = \{x - z : z \in \text{supp } f\}$

Si può affermare che, se $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ allora $(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g = \emptyset$.

Infatti, Se per assurdo esiste $y \in (x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g$ si avrebbe che

- $y \in x - \text{supp } f \implies \exists z \in \text{supp } f : y = x - z$
- $y \in \text{supp } g$

Cioè $x = y + z$ con $y \in \text{supp } g$ e $z \in \text{supp } f$, ovvero $x \in \text{supp } f + \text{supp } g$.

In particolare si avrebbe $(f * g)(x) = 0$ q.o. su $\mathbb{R}^n \setminus (\text{supp } f + \text{supp } g)$. Perciò:

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$$

□

Osservazione 1.1.4. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Se $\text{supp}(f)$ e $\text{supp}(g)$ sono entrambi compatti, allora anche $\text{supp}(f * g)$ è un insieme compatto.

Dimostrazione:

Dato che $\text{supp}(f)$ e $\text{supp}(g)$ sono compatti, essi sono limitati. Pertanto:

$$\exists R > 0 : \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subseteq B_R$$

Dalla Proposizione 1.3 sappiamo che $\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

Poiché ogni elemento $z = x + y$ con $x \in \text{supp}(f)$ e $y \in \text{supp}(g)$ soddisfa $|x + y| \leq |x| + |y| < 2R$, si ha che:

$$\overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)} \subseteq \overline{B_{2R}}$$

Essendo $\overline{B_{2R}}$ un insieme compatto per il teorema di Heine-Borel, e poiché $\text{supp}(f * g)$ è un sottoinsieme chiuso di un compatto, concludiamo che anche $\text{supp}(f * g)$ è compatto.

Proposizione 1.1.5. Siano $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora la convoluzione $(f * g)(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $(f * g) \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione: Essendo per ipotesi $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, ovvero f continua a supporto compatto, si ha che esiste un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto tale che $\text{supp}(f) \subseteq K$.

Consideriamo ora il modulo della convoluzione per un generico $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \right|$$

Poiché $f(x - y) \neq 0$ solo se $(x - y) \in K$ (ovvero $y \in x - K$), risulta:

$$\left| \int_{x-K} f(x - y)g(y) dy \right| \leq \int_{x-K} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy$$

Poiché f è continua sul compatto $x - K$, per il Teorema di Weierstrass essa è limitata su $x - K$. Esiste quindi una costante M tale che:

$$M = \max_{y \in x-K} |f(y)|$$

Applicando la limitatezza di f data dal teorema Weierstrass, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-K} f(x - y)g(y) dy \right| &\leq \int_{x-K} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy \\ &\leq M \int_{x-K} |g(y)| dy \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, l'integrale di $|g|$ su qualsiasi insieme compatto è finito. Essendo $x - K$ un compatto, si ha:

$$M \int_{x-K} |g(y)| dy < +\infty$$

Questo prova che la funzione $(f * g)(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Vogliamo dimostrare che $f * g$ è continua in \mathbb{R}^n , ovvero che per ogni x_0 fissato risulti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = (f * g)(x_0)$$

Consideriamo :

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| = \left| \int_{x-K} f(x-y)g(y) dy - \int_{x_0-K} f(x_0-y)g(y) dy \right|$$

Sia $B = \overline{B(x_0, \delta_0)}$ una palla chiusa di raggio δ_0 e centro in x_0 . Definiamo l'insieme compatto $K' = B - K = \{z - k : z \in B, k \in K\}$. Si osservi che per ogni $x \in B$, l'insieme $x - K$ è contenuto in K' .

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| &\leq \int_{K'} |f(x-y) - f(x_0-y)| \cdot |g(y)| dy \\ &\leq \int_{K'} |f(x-y) - f(x_0-y)| \cdot |g(y)| dy \end{aligned}$$

Poiché $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema di Heine-Cantor essa è uniformemente continua. Quindi, fissato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$, allora:

$$|f(x-y) - f(x_0-y)| < \frac{\epsilon}{\int_{K'} |g(y)| dy + 1}$$

Sostituendo nell'integrale, otteniamo:

$$\int_{K'} |f(x-y) - f(x_0-y)| \cdot |g(y)| dy < \frac{\epsilon}{\int_{K'} |g(y)| dy + 1} \cdot \int_{K'} |g(y)| dy < \epsilon$$

In definitiva, fissato $\epsilon > 0$:

Posto $\delta' = \min(\delta_0, \delta)$, per ogni x con $|x - x_0| < \delta'$ si ha:

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| < \epsilon$$

Questo prova la continuità di $f * g$ in x_0 . Il che dimostra che la funzione è continua in \mathbb{R}^n .

Proposizione 1.1.6. *Sia $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ e sia $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad e \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

*In particolare, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione: Consideriamo il caso $k = 1$. Dimostriamo che $f * g$ è differenziabile in \mathbb{R}^n , cioè che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un vettore $L \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(f * g)(x+h) - (f * g)(x) - L \cdot h|}{|h|} = 0$$

In particolare, vogliamo dimostrare che:

$$(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - (\nabla f * g)(x) \cdot h = o(|h|)$$

Per il teorema Ponte, ciò equivale a dimostrare che per ogni successione $\{h_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che $h_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + h_n - y) - f(x - y) - \nabla f(x - y) \cdot h_n}{|h_n|} g(y) dy = 0$$

Definiamo la successione di funzioni $R_n(y)$ come:

$$R_n(y) = \left[\frac{f(x + h_n - y) - f(x - y) - \nabla f(x - y) \cdot h_n}{|h_n|} \right] g(y)$$

1. Convergenza puntuale: dato che $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, essa è differenziabile in ogni punto. Per definizione di differenziabilità, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ fissato:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n - y) - f(x - y) - \nabla f(x - y) \cdot h_n}{|h_n|} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(y) = 0$$

2. Dominanza: Per il Teorema del Valor Medio, esiste un punto $\xi_{n,y}$ sul segmento tra $(x - y)$ e $(x + h_n - y)$ tale che:

$$|f(x + h_n - y) - f(x - y)| = |\nabla f(\xi_{n,y}) \cdot h_n| \leq \|\nabla f\|_\infty |h_n|$$

Sia K un compatto tale che $\text{supp}(R_n) \subseteq K$ per ogni $|h_n| \leq 1$. Per ogni $y \in K$, abbiamo la maggiorazione:

$$|R_n(y)| \leq \frac{\|\nabla f\|_\infty |h_n| + \|\nabla f\|_\infty |h_n|}{|h_n|} |g(y)| = 2\|\nabla f\|_\infty |g(y)|$$

La funzione $G(y) = 2\|\nabla f\|_\infty |g(y)| \chi_K(y)$ è integrabile in quanto $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e K è un compatto.

Per il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue, è lecito passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} R_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} 0 dy = 0$$

Per l'arbitrarietà della successione $\{h_n\}$, il limite per $h \rightarrow 0$ è nullo. Ciò prova la differenziabilità della convoluzione e che $\nabla(f * g) = \nabla f * g$.

Il caso generale segue osservando che $D^\beta f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni $|\beta| \leq k - 1$, quindi si può applicare il caso $k = 1$ ad ogni $D^\beta f$, ottenendo la tesi per ogni $D^\alpha f$ con $|\alpha| \leq k$. \square

Capitolo 2

Mollificatori

Definizione 2.1

Data una successione $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, diremo che essa è una successione di mollificatori se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\text{supp}(\rho_n) \subset \overline{B(0, 1/n)}$;
3. $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = 1$;
4. $\rho_n \geq 0$ su \mathbb{R}^N .

Osservazione 2.2

È facile costruire una successione di mollificatori a partire da una funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\text{supp}(\rho) \subseteq \overline{B(0, 1)}$, $\rho \geq 0$ su \mathbb{R}^N . Ad esempio, sia:

$$\rho(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Scegliendo la costante $C = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx}$, otteniamo una funzione normalizzata. Definiamo quindi la successione di mollificatori come:

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$$

Infatti:

- $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ poiché $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- $\text{supp}(\rho_n) = \{x : nx \in \text{supp}(\rho)\} \subseteq B(0, 1/n)$. Infatti:

$$\rho(nx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2|x|^2-1}} & \text{se } |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

- Verifichiamo l'integrale tramite il cambio di variabile $y = nx$ da cui $dy = n^N dx$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} n^N \rho(nx) dx = \int_{\mathbb{R}^N} n^N \rho(y) \frac{1}{n^N} dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) dy = 1$$

(avendo posto C tale che l'integrale di ρ sia 1).

Proposizione 2.3

Ipotesi: Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

Tesi: $\rho_n * f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^N .

Dimostrazione:

Siano $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un compatto ed $\epsilon > 0$ fissati. Essendo per ipotesi f continua su \mathbb{R}^N , essa è continua anche sul compatto K ed è, per il Teorema di Heine-Cantor, uniformemente continua su K . Esiste quindi un $\delta > 0$ (dipendente da K ed ϵ) tale che:

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in K, \forall y \in B(0, \delta) \quad (*)$$

Per $x \in \mathbb{R}^N$ si ha:

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) \rho_n(y) dy - f(x) \right|$$

Poiché $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$, possiamo scrivere $f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \rho_n(y) dy$:

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)] \rho_n(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)| \rho_n(y) dy$$

Dato che $\text{supp}(\rho_n) \subseteq B(0, 1/n)$, l'integrale si restringe alla palla:

$$= \int_{B(0, 1/n)} |f(x-y) - f(x)| \rho_n(y) dy$$

Sia ora $n \geq \bar{n}$ tale che $\frac{1}{n} < \delta$. Allora per ogni $y \in B(0, 1/n)$ vale la stima (*):

$$\leq \epsilon \int_{B(0, 1/n)} \rho_n(y) dy = \epsilon \cdot 1 = \epsilon$$

Abbiamo quindi dimostrato che fissati $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto ed $\epsilon > 0$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ (che dipende solo da K e ϵ) tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in K$$

ovvero la tesi. □

Teorema 2.4

Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora:

$$(\rho_n * f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione:

Fissiamo $\epsilon > 0$. Essendo $C_c^0(\mathbb{R}^N)$ denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione $\{f_k\} \subseteq C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. In particolare, esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq \bar{k}$ risulti $\|f - f_k\|_p < \frac{\epsilon}{4}$. Si ha, pertanto:

$$\|f - f_{\bar{k}}\|_p < \frac{\epsilon}{4} \quad (*)$$

Per la Proposizione 2.3, sappiamo che $(\rho_n * f_{\bar{k}}) \rightarrow f_{\bar{k}}$ uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^N . D'altra parte, per le proprietà del supporto della convoluzione:

$$\text{supp}(\rho_n * f_{\bar{k}}) \subseteq \text{supp}(\rho_n) + \text{supp}(f_{\bar{k}}) = \overline{B(0, 1/n)} + \text{supp}(f_{\bar{k}}) \subseteq \overline{B(0, 1)} + \text{supp}(f_{\bar{k}}) = K$$

dove K è un insieme compatto che non dipende da n .

In corrispondenza di $\epsilon > 0$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ risulti:

$$|\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}| < \frac{\epsilon}{2[m(K) + 1]^{1/p}} \quad (**)$$

Valutiamo ora la norma L^p della differenza tra $\rho_n * f_{\bar{k}}$ e $f_{\bar{k}}$:

$$\|\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}|^p dx \right]^{1/p} = \left[\int_K |\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}|^p dx \right]^{1/p}$$

Applicando la stima (**):

$$\left[\int_K |\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}|^p dx \right]^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2[m(K) + 1]^{1/p}} \cdot [m(K)]^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq \bar{n} \quad (***)$$

Consideriamo infine

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f - f\|_p &= \|\rho_n * f - \rho_n * f_{\bar{k}} + \rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}} + f_{\bar{k}} - f\|_p \leq \\ &\leq \|\rho_n * (f - f_{\bar{k}})\|_p + \|\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}\|_p + \|f_{\bar{k}} - f\|_p \leq \end{aligned}$$

Per la proprietà della convoluzione :

$$\leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|f - f_{\bar{k}}\|_p + \|\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}\|_p + \|f - f_{\bar{k}}\|_p \leq$$

Essendo $\|\rho_n\|_1 = 1$:

$$= 2\|f - f_{\bar{k}}\|_p + \|\rho_n * f_{\bar{k}} - f_{\bar{k}}\|_p \leq$$

Sostituendo le stime (*) e (***):

$$\leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Cioè, fissato $\epsilon > 0$, esiste \bar{n} tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $\|\rho_n * f - f\|_p < \epsilon$. [Approssimazione di funzioni di classe C^∞]

Corollario 2.5

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.

Dimostrazione:

Sia $f \in L^p(\Omega)$. Poniamo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

In questo modo risulta $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x)|^p dx = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$$

poiché per ipotesi $f \in L^p(\Omega)$.

Sia ora $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $K_n \subseteq \mathbb{R}^N$ una successione di compatti tale che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = \Omega$ e $\text{dist}(K_n, \mathbb{C}\Omega) \geq \frac{2}{n}$ per ogni n . [Ad esempio, si può definire $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n \text{ e } \text{dist}(x, \mathbb{C}\Omega) \geq \frac{2}{n}\}$].

Poniamo $g_n = \chi_{K_n} f$ e definiamo la successione $f_n = \rho_n * g_n$. Per le proprietà del supporto della convoluzione si ha:

$$\text{supp}(f_n) \subseteq \text{supp}(\rho_n) + \text{supp}(g_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + K_n \subset \Omega$$

grazie alla condizione sulla distanza di K_n dal bordo. Dalla proposizione 1.1.6 segue che $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ per ogni n .

Consideriamo ora la norma della differenza in $L^p(\Omega)$:

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = \|f_n - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|(\rho_n * g_n) - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Aggiungendo e sottraendo il termine $(\rho_n * \bar{f})$ e utilizzando la disuguaglianza di Minkowski:

$$\begin{aligned} \|f_n - \bar{f}\|_p &= \|(\rho_n * g_n) - (\rho_n * \bar{f}) + (\rho_n * \bar{f}) - \bar{f}\|_p \leq \\ &\leq \|\rho_n * (g_n - \bar{f})\|_p + \|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_p \end{aligned}$$

Per la stima L^p con $\|\rho_n\|_1 = 1$:

$$\leq \|g_n - \bar{f}\|_p + \|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_p \quad (*)$$

Analizziamo i due termini per $n \rightarrow \infty$:

1. Il primo termine $\|g_n - \bar{f}\|_p = \|\chi_{K_n} \bar{f} - \bar{f}\|_p \rightarrow 0$ per il Teorema della Convergenza Dominata, in quanto $\chi_{K_n} \bar{f} \rightarrow \bar{f}$ puntualmente e $|\chi_{K_n} \bar{f} - \bar{f}|^p \leq |2\bar{f}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
2. Il secondo termine $\|\rho_n * \bar{f} - \bar{f}\|_p \rightarrow 0$ per il Teorema 2.4 sulle proprietà dei mollificatori in L^p .

Dalla relazione (*) concludiamo che:

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ovvero la tesi.

Autorizzo l'università degli studi di Catania a pubblicare questo lavoro