Il lemma di copertura di Besicovitch

Salvatore Cantali

13 maggio 2026

> Because in truth I am speaking
> now the way you do. I speak
> because I am shattered.
>
> Louise Glück- The Red Poppy

Nell'ambito della teoria della misura in $\mathbb{R}^n$, in cui può capitare di dover studiare insiemi particolarmente complessi dal punto di vista concettuale, i teoremi di copertura svolgono un ruolo importante perché permettono, letteralmente, di ricoprire un insieme tramite un conglomerato di insiemi più semplici, spesso palle o cubi, permettendoci di estrarre, frequentemente sotto forma di diseguaglianze, informazioni sulle proprietà degli insiemi di partenza.

In questa relazione viene presentato un lemma di ricoprimento dovuto ad A. Besicovitch, la particolarità di questo lemma sta nel fornire, per ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$, una successione ricoprente di palle $\{B_k\}$ e una costante dipendente dalla sola dimensione n dello spazio (si veda il Teorema 1.3) che limita il numero di sottofamiglie necessarie a riorganizzare le palle $\{B_k\}$ in collezioni disgiunte. Questo fatto risulta abbastanza sorprendente se si pensa che la dimostrazione del lemma fa uso solo delle sole proprietà geometriche di $\mathbb{R}^n$, il che ci conferma ancora una volta la ricchezza della geometria di questo spazio da cui possiamo attingere per dedurre utili risultati validi per classi molto ampie di misure, persino in contesti cui il più famoso lemma di copertura di Vitali fallisce.
Per approfondimenti si vedano [1] [2].

1 Lemma di copertura di Besicovitch

Definizione 1.1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di palle chiuse di $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{F}$ è detto **ricoprimento di Besicovitch** per E se ogni $x \in E$ è il centro di una palla, avente raggio positivo, appartenente ad $\mathscr{F}$.

Osservazione 1.2. Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ esiste sempre un ricoprimento di Besicovitch per E. Ciò segue subito dal fatto che $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è uno spazio metrico, ed è sempre possibile costruire una palla con centro assegnato e raggio positivo.

Teorema 1.3. *Lemma di copertura di Besicovitch*
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato, ed $\mathscr{F}$ un ricoprimento di Besicovitch per E tale che $\sup\{$*raggi delle palle di* $\mathscr{F}\} = R < +\infty$, *allora*

1. *Esiste una successione numerabile $\{x_k\}$ di punti di E che costituiscono i centri per una successione $\{B(x_k, \rho_k)\}$ di palle di $\mathscr{F}$, detta* ***successione ricoprente di Besicovitch*** *per E, con la proprietà che* $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$.

2. *Le palle della successione $\{B(x_k, \rho_k)\}$, possono essere riorganizzate in c_n sottofamiglie $\mathscr{B}_1, \dots \mathscr{B}_{c_n}$ ciascuna costituita da palle tutte disgiunte tra loro. Inoltre c_n è una costante dipendente dalla sola dimensione n dello spazio (e quindi indipendente sia da E sia da $\mathscr{F}$).*

Dimostrazione. Iniziamo provando 1. Costruiremo induttivamente una successione di palle che ricoprono E. Osserviamo anzitutto che E è limitato ed $R < +\infty$, pertanto esiste una palla B_0 centrata nell'origine che contiene E e anche tutte le palle di $\mathscr{F}$. Al passo 1 poniamo

$$\begin{cases} E_1 = E \\ \mathscr{F}_1 = \{B \in \mathscr{F} \text{ con centro in } E_1\} \\ r_1 = \sup\{\text{raggi delle palle di } \mathscr{F}_1\}. \end{cases}$$

Per le proprietà del sup esiste $x_1 \in E_1$ e una palla $B_1 = B(x_1, \rho_1) \in \mathscr{F}$ di raggio $\rho_1 > \frac{3}{4} r_1$. Se $E_1 \subset B_1$ si ha la tesi. Altrimenti al passo 2 poniamo

$$\begin{cases} E_2 = E \setminus B_1 \\ \mathscr{F}_2 = \{B \in \mathscr{F}_1 \text{ con centro in } E_2\} \\ r_2 = \sup\{\text{raggi delle palle di } \mathscr{F}_2\}. \end{cases}$$

Ancora per le proprietà del sup esiste $x_2 \in E_2$ e una palla $B_2 = B(x_2, \rho_2) \in \mathscr{F}$ di raggio $\rho_2 > \frac{3}{4} r_2$. Se $E \subset B_1 \cup B_2$ si ha la tesi. Altrimenti procediamo ricorsivamente definendo al passo k.

$$\begin{cases} E_k = E \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j \\ \mathscr{F}_k = \{B \in \mathscr{F}_{k-1} \text{ con centro in } E_k\} \\ r_k = \sup\{\text{raggi delle palle di } \mathscr{F}_k\}. \end{cases}$$

Per le proprietà del sup esiste $B_k = B(x_k, \rho_k)$ tale che $\rho_k > \frac{3}{4} r_k$. Osserviamo adesso che se $m > k$ si ha

$$\rho_k > \frac{3}{4} r_k \geq \frac{3}{4} r_m > \frac{3}{4} \rho_m. \tag{1}$$

Dal fatto che $x_m \notin B_k$ si ha inoltre:

$$|x_k - x_m| > \rho_k = \frac{1}{3}\rho_k + \frac{2}{3}\rho_k > \frac{1}{3}\rho_k + \frac{1}{3}\rho_m.$$

Cioè le palle $B\left(x_k, \frac{1}{3}\rho_k\right)$, tutte contenute in B_0, sono tra loro disgiunte. Vogliamo dedurre da questo che la successione dei raggi ρ_n delle palle B_n sia infinitesima. Ricordiamo che su $\mathbb{R}^n$ la misura di Lebesgue $m(\cdot)$ di una palla coincide con il suo volume, pertanto, grazie alla proprietà di isotonia, si ha indicando con κ_n il volume, in $\mathbb{R}^n$, della palla unitaria:

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B\left(x_k, \frac{1}{3}\rho_k\right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \kappa_n \left(\frac{1}{3}\rho_k\right)^n \leq m(B_0) < +\infty.$$

Da cui $\sum_{k \in \mathbb{N}} \kappa_n \left(\frac{1}{3}\rho_k\right)^n$ converge e per la condizione necessaria sulla convergenza delle serie

$$\lim_{k \to +\infty} \rho_k = 0.$$

Pertanto la successione $\{\rho_k\}$ dei raggi delle palle B_k è infinitesima. Per costruzione, si ha inoltre:

$$0 < \frac{3}{4} r_k < \rho_k \text{ da cui } \lim_{k \to +\infty} r_k = 0.$$

Da ciò segue che la successione $\{B_k\}$ ricopre E. Infatti se per assurdo non fosse così prendiamo $x \in E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$, $\mathscr{F}$ è un ricoprimento di Besicovitch quindi esiste un $\rho > 0$ e una palla $B(x, \rho)$, tale palla deve appartenere a tutte le famiglie $\mathscr{F}_k$, pertanto deve essere

$$0 < \rho < r_k,$$

da cui passando al limite $\rho = 0$ che è assurdo. Ciò prova 1. Per provare 2, premettiamo un lemma che dimostreremo in seguito.

Lemma 1.4. *Sia $\{B_k\}$ come sopra, allora esiste una costante c_n dipendente soltanto dalla dimensione dello spazio tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ al più c_n palle tra $\{B_1, \ldots, B_k\}$ intersecano B_k.*

Iniziamo ponendo $\mathscr{B}_1 = \cdots = \mathscr{B}_{c_n} = \emptyset$.
per $j = 1, \ldots, c_n$ allochiamo la palla B_j nella sottofamiglia $\mathscr{B}_j$.
Per allocare le palle rimanenti procediamo ragionando per induzione su k.
Se $k = 1$ abbiamo, dal Lemma 1.4 che la palla B_{c_n+1} interseca al più $c_n - 1$ delle c_n palle dell'insieme $\{B_1, \ldots, B_{c_n}\}$, dunque esiste un j tale che la palla B_j, non interseca B_{c_n+1} e possiamo allocare B_{c_n+1} nella sottofamiglia $\mathscr{B}_j$.
Supponiamo ora che le prime $c_n + k - 1$ palle siano state correttamente allocate nelle sottofamiglie $\mathscr{B}_s$ *con* $s = 1, \ldots, c_n$. Per il Lemma 1.4 al massimo $c_n - 1$ palle tra $\{B_1, \ldots, B_{c_n+k-1}\}$ intersecano B_{c_n+k}. Poiché le sottofamiglie $\mathscr{B}_s$ sono c_n abbiamo, per il principio dei cassetti, che le palle che intersecano B_{c_n+k} possono occupare al più $c_n - 1$ sottofamiglie, quindi esiste un s, tale che, la sottofamiglia $\mathscr{B}_s$ non contiene nessuna delle palle che intersecano B_{c_n+k}, e sfruttando l'ipotesi induttiva abbiamo che B_{c_n+k} può essere correttamente allocato nella sottofamiglia $\mathscr{B}_s$. $\square$

Per completare davvero la dimostrazione del lemma di ricoprimento di Besicovitch, manca solo da provare 1.4, quella che seguirà sarà una dimostrazione dipendente puramente dalla geometria di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Fissiamo un intero positivo k e consideriamo le palle $B_j, j = 1, \ldots, k$ che intersecano B_k. Definiamo ora gli insiemi:

$$\mathscr{G}_1 = \Big\{B_j : B_j \cap B_k \neq \emptyset, \rho_j \leq \frac{3}{4} M \rho_k\Big\}$$
$$\mathscr{G}_2 = \Big\{B_j : B_j \cap B_k \neq \emptyset, \rho_j > \frac{3}{4} M \rho_k\Big\}.$$

Dove $M > 3$ è un intero positivo da scegliere opportunamente. Anzitutto proviamo il seguente lemma.

Lemma 1.5. *La cardinalità di $\mathscr{G}_1$ non può superare $4^n(M+1)^n$*

Dimostrazione. Sia $\#(\mathscr{G}_1)$ la cardinalità di $\mathscr{G}_1$. Consideriamo la successione di palle $\{B(x_j, \frac{1}{3}\rho_j)\}$, si ha: poiché $B_j \cap B_k \neq \emptyset$,

$$|x_j - x_k| \leq \rho_j + \rho_k \leq \left(\frac{3}{4} M + 1\right) \rho_k.$$

Inoltre, per ogni $x \in B(x_j, \frac{1}{3}\rho_j)$,

$$|x - x_k| \leq |x - x_j| + |x_j - x_k| \leq \frac{1}{3}\rho_j + \left(\frac{3}{4}M + 1\right)\rho_k \leq (M+1)\rho_k.$$

Da questo denotando con κ_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j: B_j \in \mathscr{G}_1} \kappa_n \left(\frac{1}{3}\rho_j\right)^n \leq \kappa_n (M+1)^n \rho_k^n.$$

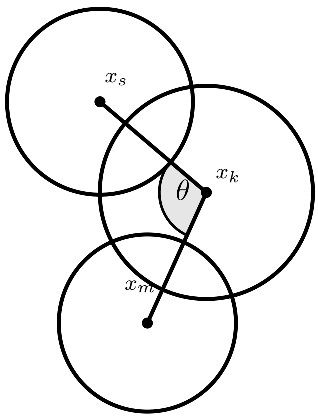
Dal fatto $j < k$, segue dalla Formula 1 che $\frac{1}{3}\rho_j > \frac{1}{4}\rho_k$. Pertanto,

$$\#(\mathscr{G}_1)\kappa_n \left(\frac{1}{4}\rho_k\right)^n \leq \kappa_n (M+1)^n \rho_k^n.$$

Da cui segue subito la tesi. $\square$

Resta da determinare un limite superiore per la cardinalità di $\mathscr{G}_2$. Per fare ciò conteremo i raggi che partono dal centro x_k di B_k e arrivano al centro x_j di $B_j \in \mathscr{G}_2$. Questo conto va fatto in due passi. Per prima cosa stabiliremo che comunque si prendano due raggi di questo tipo l'angolo tra di essi è maggiore o uguale a un fissato angolo θ_0 e infine stimeremo il numero di raggi che partono da x_k e formano un angolo almeno θ_0. Siano adesso B_k e B_m due palle di $\mathscr{G}_2$ e sia

$$\theta = \{\text{angolo tra i raggi che partono da } x_k \text{ e arrivano in } x_s \text{ e } x_m\}$$



Lemma 1.6. *Il numero reale M può essere scelto in modo che $\theta > \theta_0 = \arccos\frac{5}{6} \approx 33.56°$*

Dimostrazione. Supponiamo $s < m < k$. Per costruzione si ha $x_m \notin B(x_s, \rho_s)$, ovvero:

$$|x_s - x_m| > \rho_s. \tag{2}$$

Inoltre $x_k \notin B(x_s, \rho_s) \cup B(x_m, \rho_m)$, il che implica:

$$\rho_s < |x_s - x_k| \quad \text{e} \quad \rho_m < |x_m - x_k|.$$

Poiché sia $B(x_s, \rho_s)$ che $B(x_m, \rho_m)$ intersecano B_k e appartengono a $\mathscr{G}_2$, si ha:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}M\rho_k < \rho_s \leq |x_s - x_k| \leq \rho_s + \rho_k \\ \frac{3}{4}M\rho_k < \rho_m \leq |x_m - x_k| \leq \rho_m + \rho_k \end{cases} \tag{3}$$

Se $\cos\theta \leq 0$ la tesi è ovvia.
Se $\cos\theta > 0$ per la trigonometria elementare (teorema del coseno), l'angolo θ tra i vettori $(x_s - x_k)$ e $(x_m - x_k)$ soddisfa:

$$\cos\theta = \frac{|x_s - x_k|^2 + |x_m - x_k|^2 - |x_s - x_m|^2}{2|x_s - x_k||x_m - x_k|}.$$

Poiché $\cos\theta > 0$ e utilizzando (2) e (3), abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos\theta &\leq \frac{(\rho_s + \rho_k)^2 + (\rho_m + \rho_k)^2 - \rho_s^2}{2\rho_s\rho_m} \\ &\leq \frac{\rho_m^2 + 2\rho_k^2 + 2\rho_k(\rho_s + \rho_m)}{2\rho_s\rho_m} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{\rho_s} + \frac{\rho_k}{\rho_s}\frac{\rho_k}{\rho_m} + \frac{\rho_k}{\rho_m} + \frac{\rho_k}{\rho_s} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{\rho_s} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{M^2} + 2\left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{M}.\end{aligned}$$

Poiché $m > s$, dalla costruzione della successione segue che $\rho_s > \frac{3}{4}\rho_m$. Pertanto, sostituendo si ottiene:

$$\cos\theta \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3M}\left(\frac{4}{3M} + 2\right).$$

Da cui la tesi scegliendo M in maniera tale che $\cos\theta \leq \frac{5}{6}$, ricordando che $\arccos(\cdot)$ è una funzione decrescente segue la tesi. $\square$

Si hanno adesso due casi.

- $n = 2$, il numero di raggi che partono dall'origine e che formano un angolo $\theta > \theta_0$ non deve superare $\dfrac{2\pi}{\theta_0}$.
- $n \geq 3$ sia $\mathcal{C}(\theta_0)$ un cono circolare in $\mathbb{R}^n$ con vertice nell'origine, la cui sezione assiale con un piano formi un angolo bidimensionale pari a $\frac{1}{2}\theta_0$. Sia $\sigma_n(\theta_0)$ l'angolo solido corrispondente a $\mathcal{C}(\theta_0)$. Pertanto il numero di raggi che partono dall'origine e formano un angolo $\theta > \theta_0$ non deve superare $\dfrac{\omega_n}{\sigma_n(\theta_0)}$. Dove ω_n rappresenta l'area della sfera $n-$dimensionale.

Possiamo quindi stimare c_n in questo modo

$$c_n = \#(\mathscr{G}_1) + \#(\mathscr{G}_2) \leq 4^n(M+1)^n + \frac{\omega_n}{\sigma_n(\theta_0)}.$$

$\square$

2 Confronto con il lemma di copertura di Vitali

Enunciamo anzitutto il lemma di copertura di Vitali in una forma che rende facile il confronto con il lemma di copertura di Besicovitch. Per approfondimenti si veda [2]

Definizione 2.1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathscr{F}$ come nella Definizione 1.1. $\mathscr{F}$ si dice **ricoprimento fine** se per ogni $x \in E$ si ha:

$$\inf\{\text{raggi di } B \mid B \in \mathscr{F},\ x \in B\} = 0.$$

Osservazione 2.2. Se $B = B(x,r)$ denotiamo con $\hat{B} = B(x, 5r)$.

Teorema 2.3. *Lemma di copertura di Vitali versione geometrica*
Sia $\mathscr{F}$ un ricoprimento fine per $E \subset \mathbb{R}^n$, supponiamo si abbia

$$\sup\{\textit{raggi di } B \mid B \in \mathscr{F}\} < +\infty.$$

Allora esiste una successione $\{B_n\} \subset \mathscr{F}$ di palle disgiunte, detta ***successione ricoprente di Vitali*** *per E, tale che vale una delle seguenti affermazioni:*

1. $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \hat{B}_k$.

2. *Per ogni sottofamiglia finita $\{B_1, \ldots, B_s\}$ si ha*

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{s} B_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,s\}} \hat{B}_k.$$

La cosa che salta subito all'occhio è che la successione ricoprente di Vitali è costituita da palle a due a due disgiunte, mentre la successione ricoprente di Besicovitch no. Tuttavia grazie al Lemma 1.4 il fenomeno di *overlapping* tra le palle di una successione ricoprente di Besicovitch è gestibile in quanto, come si è visto, le palle possono essere sempre riorganizzate in una collezione di c_n famiglie che contenenti ciascuna palle disgiunte.

Come è noto per una successione ricoprente di Vitali vale la seguente proprietà.

Proposizione 2.4. *Sia $\{B_k\}$ una successione ricoprente di Vitali per $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato, e sia $m(\cdot)$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, allora*

$$m\left(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = 0.$$

Il seguente esempio mostra come non sia possibile estendere tale proprietà delle successioni ricoprenti di Vitali a una generica misura definita su $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$

Esempio 2.5. Siano $n = 2$, $O = (0,0)$ e $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ la misura così definita:

$$\mu(S) = \begin{cases} 1 \text{ se } O \in S \\ 0 \text{ se } O \notin S \end{cases} \quad \text{per ogni } S \in \mathscr{P}(R^2).$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice per la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario e sia

$$x_k = \left(A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}\right)^T \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}_0.$$

Definiamo per $E = \{O\}$ il ricoprimento fine:

$$\mathscr{F} = \left\{ B\left(O, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ B\left(x_k, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Costruiamo una successione ricoprente di Vitali per E procedendo come nell'algoritmo usato per la dimostrazione del lemma di copertura di Vitali (si veda [2]):
per $k = 0$ avendosi

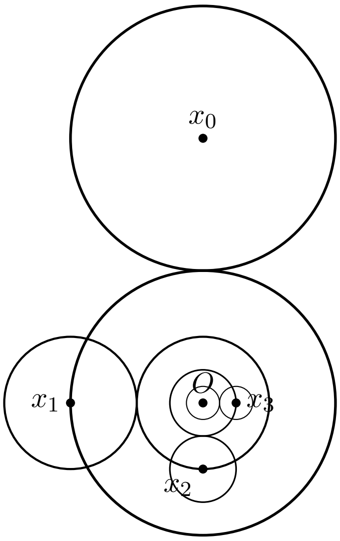
$$\sup\{\text{raggi palle di } \mathscr{F}\} = \frac{1}{2}$$

possiamo scegliere o la palla centrata in x_0 o quella centrata in O, scegliamo quella centrata in x_0.
Al passo $k > 0$ avendosi

$$\sup \{\text{raggi palle di } \mathscr{F} \text{ disgiunte dalle } B_s \ s = 0, \dots, k-2 \text{ già scelte}\} = \frac{1}{2^k}$$

possiamo scegliere tra la palla di centro O e raggio $\frac{1}{2^k}$ e quella di centro x_{k-1} e raggio $\frac{1}{2^k}$ scegliamo sempre quest'ultima (per come abbiamo costruito le precedenti risulta da esse disgiunta). In questo modo si è ottenuta una successione $\{B_k\}$ di palle ciascuna non contenente O. Si ha quindi:

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = 1.$$



Esempi come quello appena visto ci suggeriscono che se si vuole lavorare con misure generiche definite su $\mathbb{R}^n$ il lemma di copertura di Vitali fallisce, non fallisce tuttavia quello di Besicovitch, infatti è possibile provare.

Proposizione 2.6. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento di Besicovitch fine per E. Sia μ una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$ e μ_e la misura esterna ad essa associata. Esiste una successione $\{B_k\}$ di palle disgiunte $B_k \in \mathcal{F}$ tale che*

$$\mu_e\left(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = 0.$$

Riferimenti bibliografici

[1] Emmanuele DiBenedetto. *Real Analysis.* Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Springer New York, New York, NY, 2016. ISBN 978-1-4939-4003-5 978-1-4939-4005-9. doi: 10.1007/978-1-4939-4005-9.

[2] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition.* Chapman and Hall/CRC, 0 edition, April 2015. ISBN 978-1-4822-4239-3. doi: 10.1201/b18333.