Analisi di Fourier e applicazioni

G.Di Fazio

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania

Problema della propagazione del calore in una sbarra.

Fourier - 1822 (caso unidimensionale)

La temperatura u è una funzione della variabile spaziale x e del tempo t. Essa è espressa da una funzione $u(x,t)$ e verifica la seguente condizione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t > 0$.

Problema della propagazione del calore in una sbarra.
Fourier - 1822 (caso unidimensionale)

La temperatura u è una funzione della variabile spaziale x e del tempo t. Essa è espressa da una funzione $u(x,t)$ e verifica la seguente condizione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t > 0$.

Problema della propagazione del calore in una sbarra.
Fourier - 1822 (caso unidimensionale)
La temperatura u è una funzione della variabile spaziale x e del tempo t. Essa è espressa da una funzione $u(x, t)$ e verifica la seguente condizione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t > 0$.

Fourier ipotizza la temperatura (incognita) come la sovrapposizione degli effetti di funzioni di tipo coseno e risolve così l'equazione.

DEFINIZIONE (SERIE TRIGONOMETRICA)

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni reali. la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

si chiama serie trigonometrica di coefficienti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

Casi particolari

DEFINIZIONE (SERIE DI SENI)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

DEFINIZIONE (SERIE DI COSENI)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$$

Casi particolari

DEFINIZIONE (SERIE DI SENI)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

DEFINIZIONE (SERIE DI COSENI)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$$

Casi particolari

Definizione (Serie di Seni)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Definizione (Serie di Coseni)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$$

DEFINIZIONE (SERIE IN FORMA COMPLESSA)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

dove $\{c_n\}$ è una successione di numeri complessi.

Le serie trigonometriche rappresentano funzioni periodiche di periodo 2π.

Può una funzione periodica essere rappresentata da una serie trigonometrica ?

In generale la risposta è no.

Si può dimostrare che, se una funzione è rappresentabile da una serie trigonometrica allora i coefficienti sono univocamente determinati.
Risulta

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

Le serie trigonometriche rappresentano funzioni periodiche di periodo 2π.

Può una funzione periodica essere rappresentata da una serie trigonometrica ?

In generale la risposta è no.

Si può dimostrare che, se una funzione è rappresentabile da una serie trigonometrica allora i coefficienti sono univocamente determinati.
Risulta

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Le serie trigonometriche rappresentano funzioni periodiche di periodo 2π.

Può una funzione periodica essere rappresentata da una serie trigonometrica ?

In generale la risposta è no.

Si può dimostrare che, se una funzione è rappresentabile da una serie trigonometrica allora i coefficienti sono univocamente determinati.
Risulta

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

Le serie trigonometriche rappresentano funzioni periodiche di periodo 2π.

Può una funzione periodica essere rappresentata da una serie trigonometrica ?

In generale la risposta è no.

Si può dimostrare che, se una funzione è rappresentabile da una serie trigonometrica allora i coefficienti sono univocamente determinati.
Risulta

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

In questo caso, la serie trigonometrica si chiama Serie di Fourier di f.

La serie di Fourier di f converge alla funzione f da cui è stata generata?

In generale la risposta è no.

Sotto opportune condizioni è possibile dimostrare che la serie di Fourier converge alla funzione.

La serie di Fourier di f converge alla funzione f da cui è stata generata?

In generale la risposta è no.

Sotto opportune condizioni è possibile dimostrare che la serie di Fourier converge alla funzione.

La serie di Fourier di f converge alla funzione f da cui è stata generata?

In generale la risposta è no.

Sotto opportune condizioni è possibile dimostrare che la serie di Fourier converge alla funzione.

Posto

$$f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t) \qquad f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$$

la serie converge al numero

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

che - in generale - non è $f(x)$.

Esempio

Esempio (Onda quadra)

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2k\pi \le x < (2k+1)\pi \\ -1 & \text{se } (2k-1)\pi \le x < 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

è periodica di periodo 2π in $\mathbb{R}$. La serie di Fourier è

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}\,.$$

Esempio (Onda a dente di sega)

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x) = x - [x]\,,$$

periodica di periodo $T = 1$ in $\mathbb{R}$ si chiama dente di sega. La serie di Fourier è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(2n\pi x)\,.$$

Quando converge una serie di Fourier ?

DEFINIZIONE (CONDIZIONE DI DIRICHLET)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Diciamo che la funzione f verifica la condizione di Dirichlet in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se è verificata almeno una delle seguenti affermazioni.

1. *La funzione f è derivabile nel punto x_0.*
2. *La funzione f è continua nel punto x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. *La funzione f ha un salto in x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'^*_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad f'^*_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

DEFINIZIONE (CONDIZIONE DI DIRICHLET)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Diciamo che la funzione f verifica la condizione di Dirichlet in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se è verificata almeno una delle seguenti affermazioni.

1. *La funzione f è derivabile nel punto x_0.*
2. *La funzione f è continua nel punto x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. *La funzione f ha un salto in x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'^*_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad f'^*_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

Definizione (Condizione di Dirichlet)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Diciamo che la funzione f verifica la condizione di Dirichlet in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se è verificata almeno una delle seguenti affermazioni.

1. *La funzione f è derivabile nel punto x_0.*
2. *La funzione f è continua nel punto x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. *La funzione f ha un salto in x_0 ed esistono entrambi finiti i seguenti limiti*

$$f'^{*}_+(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad f'^{*}_-(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

TEOREMA (SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI FOURIER)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e localmente integrabile in $\mathbb{R}$. La serie di Fourier associata alla funzione è convergente in ogni punto x in cui la funzione f soddisfi la condizione di Dirichlet e si ha

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

PROBLEMA

E se la funzione non è periodica ?

LA TRASFORMATA DI FOURIER

DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA FUNZIONE SOMMABILE)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)e^{-2\pi i x\xi}$$

è sommabile. Ponendo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

definiamo una funzione. La funzione $\hat{f}$ si chiama trasformata di Fourier della funzione f.

Definizione (Trasformata di Fourier di una funzione sommabile)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)e^{-2\pi i x\xi}$$

è sommabile. Ponendo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

definiamo una funzione. La funzione $\hat{f}$ si chiama trasformata di Fourier della funzione f.

DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA FUNZIONE SOMMABILE)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)e^{-2\pi i x\xi}$$

è sommabile. Ponendo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

definiamo una funzione. La funzione $\hat{f}$ si chiama trasformata di Fourier della funzione f.

DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA FUNZIONE SOMMABILE)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)e^{-2\pi ix\xi}$$

è sommabile. Ponendo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx$$

definiamo una funzione. La funzione $\hat{f}$ si chiama trasformata di Fourier della funzione f.

Esempio

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione f definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \textit{se } -\pi < x < \pi \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione è sommabile.
Possiamo calcolare la trasformata applicando la definizione.

Ricordando che $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x \xi} (e^{ix} - e^{-ix})\, dx\,.$$

Esempio

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione f definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & se\ -\pi < x < \pi \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

La funzione è sommabile.

Possiamo calcolare la trasformata applicando la definizione.

Ricordando che $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x \xi} (e^{ix} - e^{-ix})\, dx\,.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione f definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & se\ -\pi < x < \pi \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

La funzione è sommabile.
Possiamo calcolare la trasformata applicando la definizione.

Ricordando che $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x \xi} (e^{ix} - e^{-ix})\, dx\,.$$

Esempio

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione f definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & se\ -\pi < x < \pi \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

La funzione è sommabile.
Possiamo calcolare la trasformata applicando la definizione.

Ricordando che $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x \xi} (e^{ix} - e^{-ix})\, dx\,.$$

Eseguendo i calcoli troviamo

$$\hat{f}(\xi) = 2i\frac{\text{sen}(2\pi^2\xi)}{4\pi^2\xi^2 - 1} \quad \forall\xi \neq \pm 2\pi\xi\,.$$

Applicazioni

1. Audio
2. Immagini e video
3. Sicurezza Informatica
4. Telecomunicazioni

APPLICAZIONI

1. Audio
2. Immagini e video
3. Sicurezza Informatica
4. Telecomunicazioni

Applicazioni

1. Audio
2. Immagini e video
3. Sicurezza Informatica
4. Telecomunicazioni

1. Audio
2. Immagini e video
3. Sicurezza Informatica
4. Telecomunicazioni

Letture consigliate

- R.Wheeden A.Zygmund **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis** (Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics)
- A.Zygmund **Trigonometric Series** (Cambridge Mathematical Library)
- G.Di Fazio M.Frasca **Metodi Matematici per l'Ingegneria** Ed. Monduzzi.

Ascoltiamo le serie di Fourier