

Teoria dei Grafì

9 CFU

A.A. 2021/22

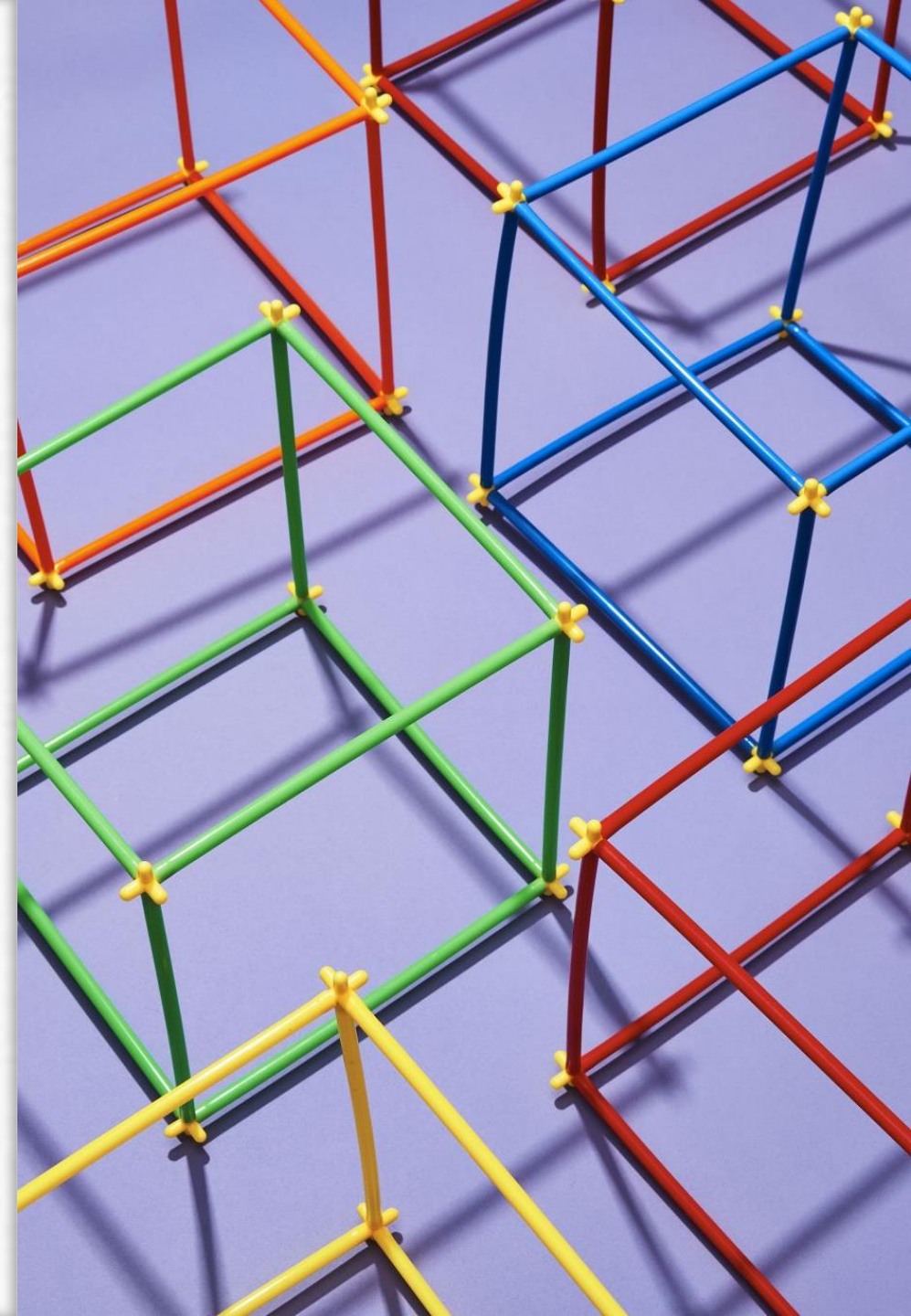
Prof.ssa Elena Guardo

31 Maggio 2021

Perchè studiare teoria dei grafi?

Pur essendo una branca della matematica pura, ha numerose applicazioni in vari settori della scienza e della tecnologia (ottimizzazione dei trasporti e delle risorse, architettura dei circuiti stampati, ecc.).

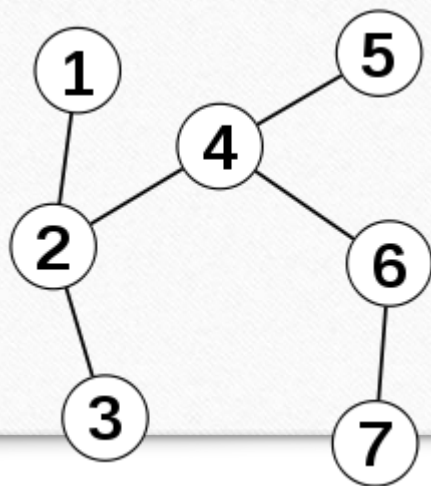
L'importanza che assume consiste nel fatto che più di una “struttura reale” può essere schematizzata utilizzando i grafi, da una rete stradale (dove i nodi sono gli incroci e gli archi le strade) ad un programma di calcolo (dove i nodi rappresentano le istruzioni ed esiste un arco tra due nodi se le relative istruzioni possono essere eseguite in successione) oppure una struttura dati (dove i nodi rappresentano i dati semplici e gli archi i legami tra i diversi dati, realizzabili tramite puntatori o formalizzabili attraverso relazioni semanticamente definite).



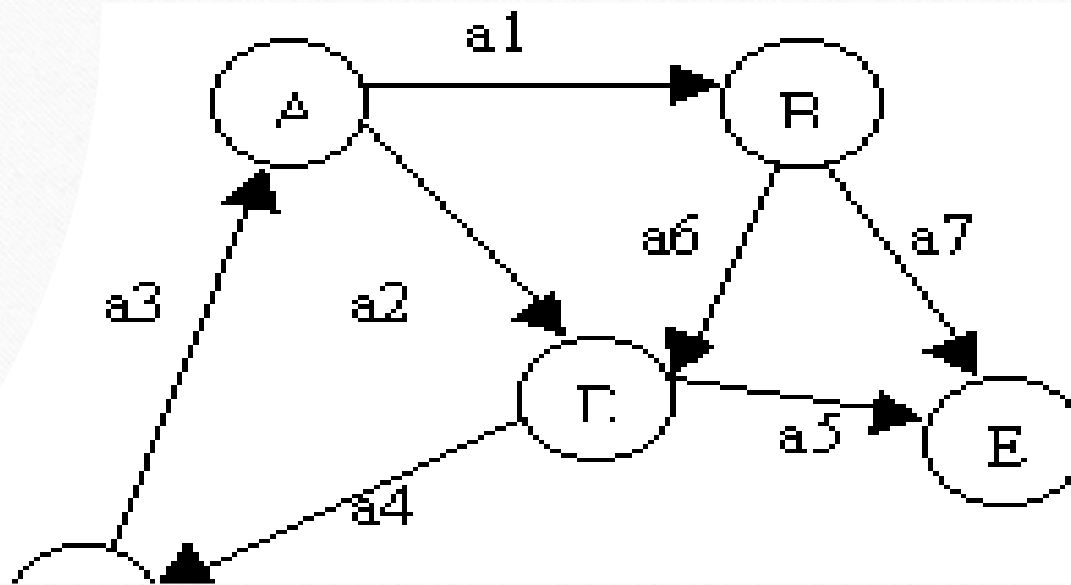
Grafi non orientati



Un grafo G è una coppia $G = (V, E)$, dove V è un insieme finito (non vuoto), detto insieme dei vertici, ed E è un insieme degli spigoli (o lati).



Alberi

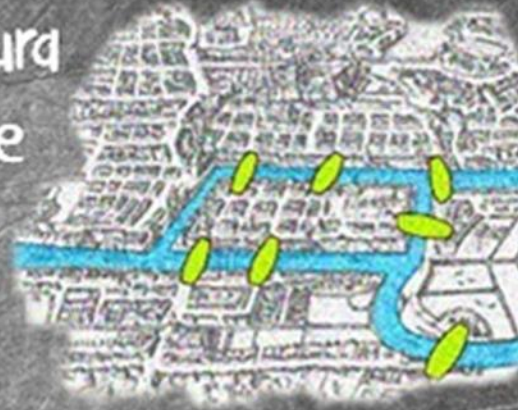


Grafi orientati

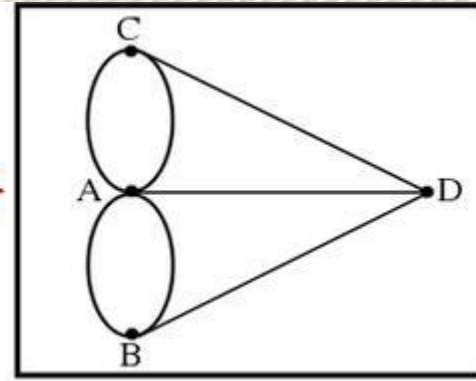
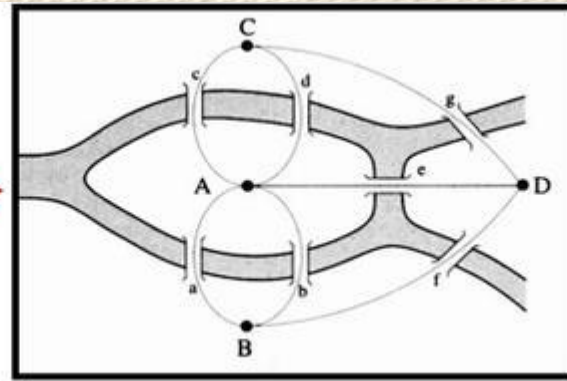
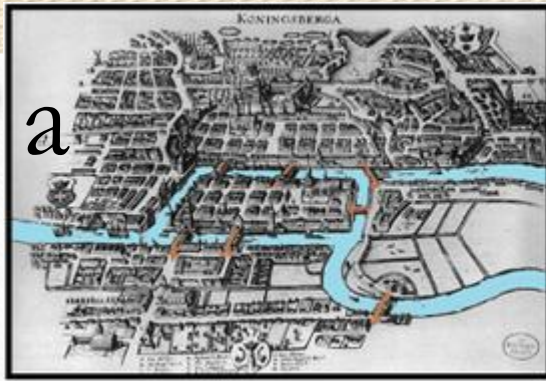


I ponti di Königsberg

Quest'immagine raffigura
la città di Königsberg e
i suoi 7 ponti.

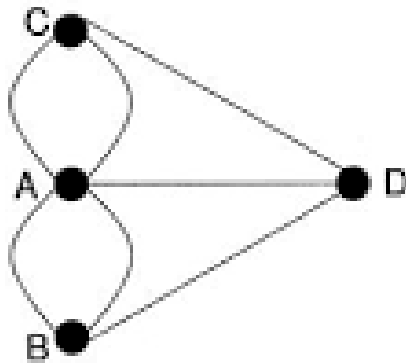


Partendo da una zona qualsiasi della
città, riuscite a trovare un percorso che
passa una e una sola volta su ognuno
dei 7 ponti?

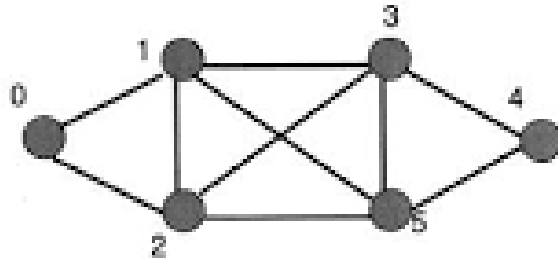


A questa rappresentazione simbolica Eulero attribuisce il nome di grafo. E lo utilizzò per dimostrare che era impossibile trovare il percorso richiesto

Grafo non Euleriano



Grafo Euleriano



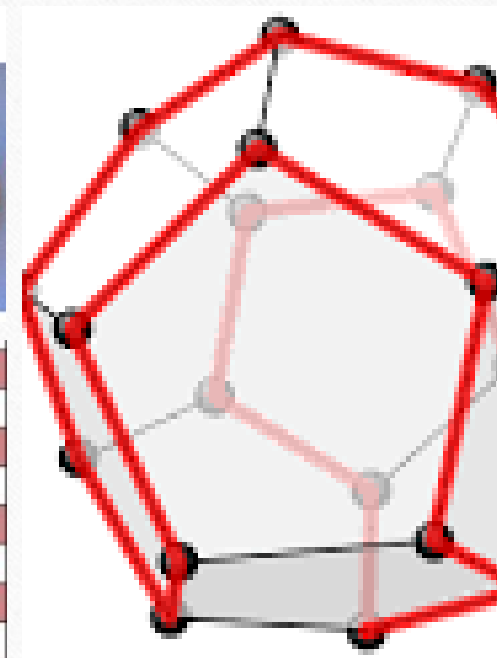
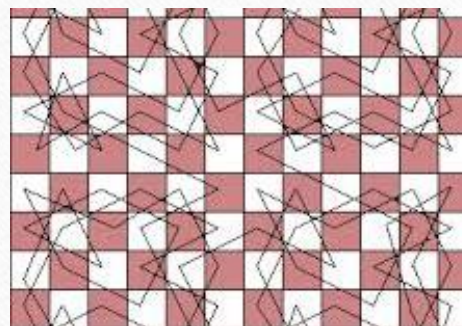
E' possibile se invece il numero di archi incidenti in ogni nodo è pari

Grafi Hamiltoniani

- Dato un grafo $G = (V, E)$, si dice cammino hamiltoniano (risp. ciclo hamiltoniano) in G un cammino (risp. un cammino chiuso) in G che tocca tutti i vertici di G , una ed una sola volta.
- Determinare se questo cammino esista è un problema NP-completo.

La classe NP prende il suo nome dall'abbreviazione di Nondeterministic Polynomial Time.

Scopo: trovare un tour lungo gli spigoli di un dodecaedro



- Un commesso viaggiatore deve visitare un certo numero di città
- Conosce la **distanza** da una città all'altra
- Vuole determinare il **percorso più breve** che gli permetta di partire da casa sua e di farvi ritorno dopo aver visitato ogni città **una sola volta**.
- **Come può fare?**

Problema del commesso
viaggiatore
Traveling Salesman's Problem
(TSP)

- Il problema può essere ovviamente riformulato nei seguenti termini: dato un grafo completo pesato, determinare il ciclo hamiltoniano avente peso minimo.



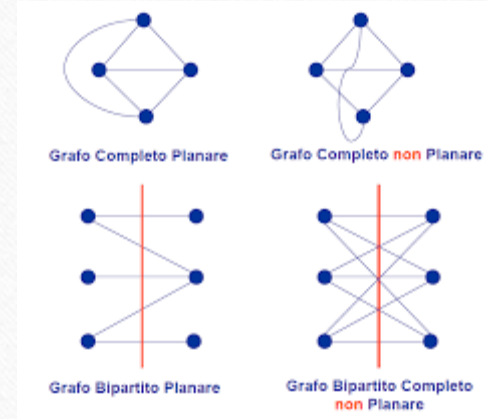
COLORAZIONI

Problema dei quattro colori

-
- Teorema dei 4 colori*. Ogni grafo planare è 4- colorabile.
 - Teorema dei 5 colori. Ogni grafo planare è 5- colorabile.

GRAFI PLANARI

- Intuitivamente, un grafo piano G è un grafo disegnato nel piano in modo tale che non ci siano intersezioni “non volute” tra i lati, cioè tale che due lati qualsiasi di G si intersechino, al più, in un vertice di G .
- Un grafo planare è un grafo che è isomorfo a un grafo piano.
- Teorema (Kuratowski, 1930.) Un grafo non è planare se e solo se esso contiene un sottografo omeomorfo a $K_{3,3}$ oppure a K_5 .



POLINOMIO CROMATICO ED APPLICAZIONI

- Esso conta il numero di colorazioni dei grafi come funzione del numero dei colori e fu definito originariamente da George David Birkhoff per affrontare il problema dei quattro colori.

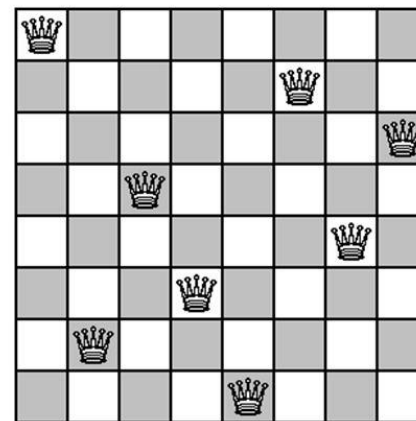
Applicazioni Polinomio cromatico:

- Disposizioni condizionate, disposizioni e colorazione dei vertici, Sudoku e polinomi cromatici. il problema delle 8 regine (Gauss).

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
			7	8				9
8	7			9				
4			6		3			
					5			

Il problema delle n regine

M. Bezzel (1848)



- Una su ogni colonna, una su ogni traversa, al più una su ogni diagonale.

Algoritmi *ad hoc*, di ordine n^3 nei casi peggiori.

Caso particolare del problema dell'insieme indipendente massimale (NP-hard): in un grafo non orientato, trovare un sottoinsieme di nodi a due a due non adiacenti, che sia il più grande possibile.

Il rompicapo (o problema) delle otto regine è un **problema** che consiste nel trovare il modo di posizionare otto **donne** (pezzo degli **scacchi**) su una scacchiera 8x8 tali che nessuna di esse possa catturarne un'altra, usando i movimenti standard della regina.

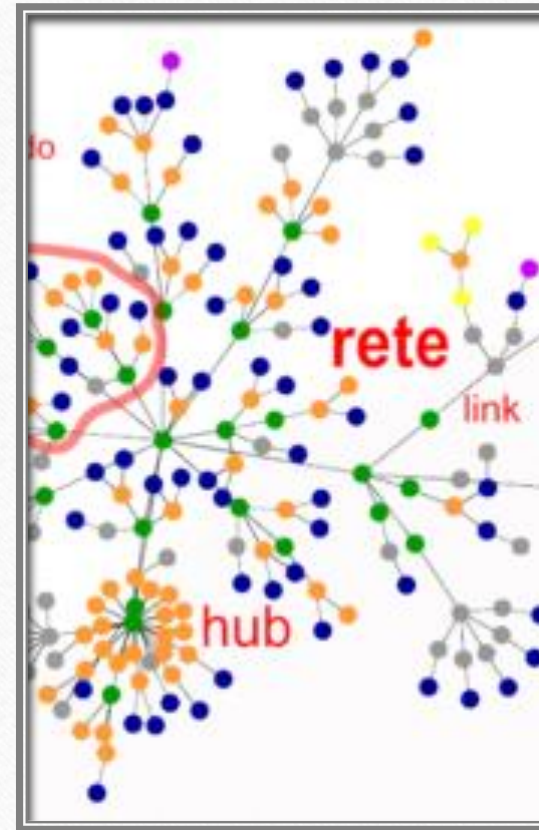
Accoppiamenti e Teorema di Hall

- Problema dei matrimoni
- Applicazioni:
- Quadrati latini
- Matrici $(0,1)$

Reti di flusso

Si applicano in:

- In epidemiologia la struttura della rete sociale di contatti è essenziale nel determinare se la diffusione di un agente patogeno raggiungerà o meno proporzioni pandemiche.
- Nelle scienze sociali la propagazione di una notizia (o di una falsa notizia) segue dinamiche simili.
 - Nel determinare strategie di marketing.
- Nelle reti biologiche che sono le catene alimentari in un ecosistema, dove le specie sono interconnesse tramite la relazione predatore-preda; le reti di regolazione genica, in cui i nodi sono geni, proteine, RNA messaggeri, etc.
- le reti metaboliche, dove i nodi sono le sostanze chimiche, che sono collegate se partecipano alla stessa reazione biochimica.



Algoritmo di Ford Fulkerson

Ancora sui grafi orientati

Cicli e Cocicli (e gli spazi vettoriali ad essi associati)

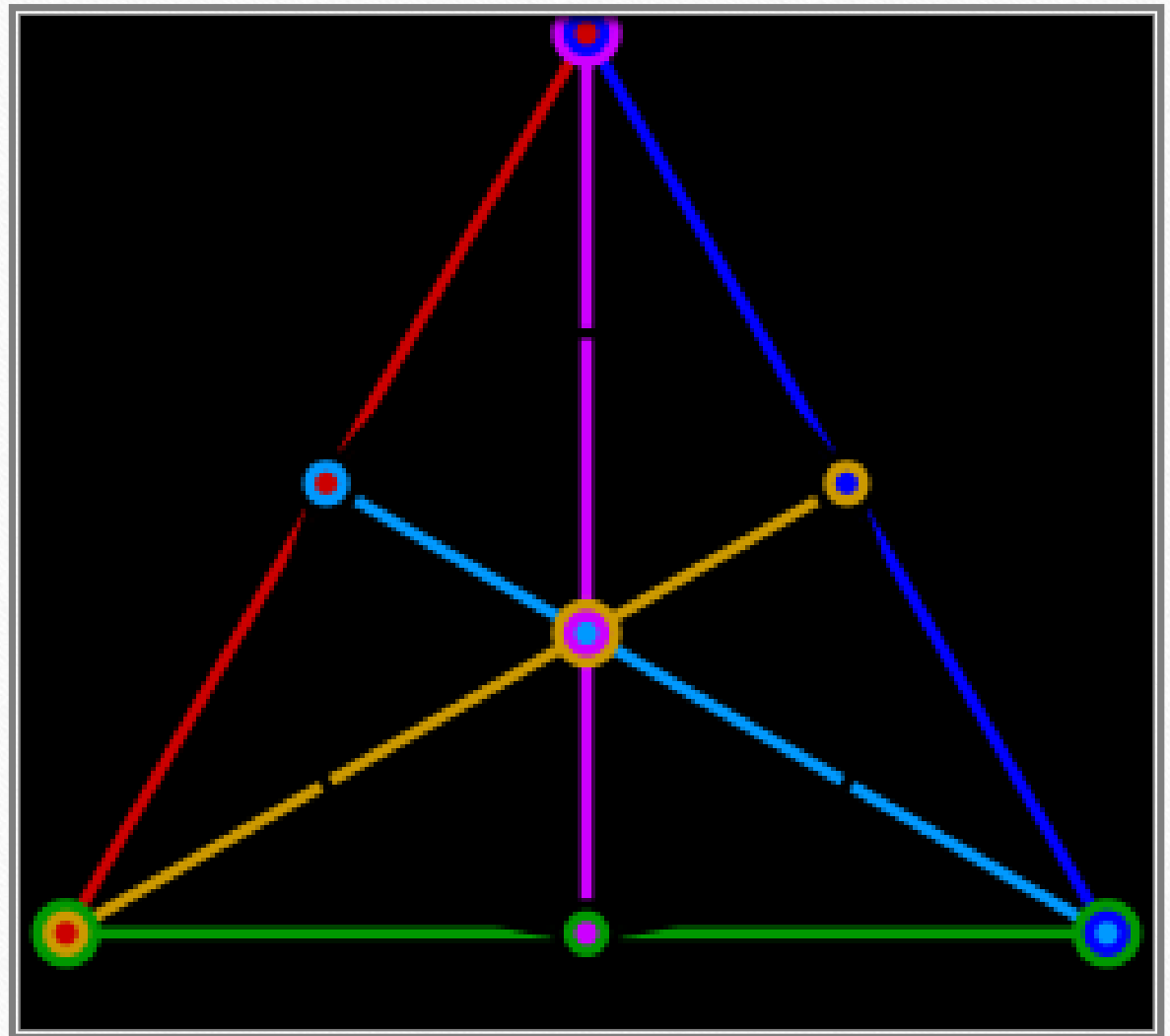
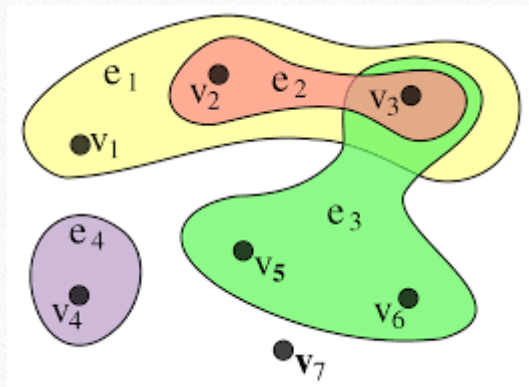
Matrici di incidenza e di adiacenza

Coalberi

Grafi fortemente connessi

E molte discussioni su problemi aperti

Cenni di G-Designs, Sistemi di Steiner e Ipergrafi



Bibliografia

- 1) C. Berge, "Graph and Hypergraph", Elsevier.
- 2) M. Gionfriddo, Notes on Graph Theory A.A. 2018/19

- 3) V. Voloshin: Introduction to Graph theory,
- 4) D. West, Introduction to Graph Theory

A young man with short brown hair, wearing a blue long-sleeved shirt, is standing in profile, writing on a dark green chalkboard. The chalkboard is covered with white chalk drawings of graph theory structures, including a star graph and a tree-like structure. The background is slightly blurred, showing a classroom setting with a wooden desk and a red container in the foreground. The overall scene is dimly lit, with the chalkboard being the primary light source.

Grazie per l'attenzione

Problemi aperti

<https://www.cantorsparadise.com/the-easiest-unsolved-problem-in-graph-theory-fa3a7f26181b>