Università di Catania
Dipartimento di Matematica e Informatica

Pesentazione del corso Complex Analysis and Integral Transforms

Docente: Salvatore A. Marano

31 maggio 2021

Lo studio delle funzioni complesse di una variabile complessa si sviluppò principalmente nel XIX secolo e fra coloro che diedero importanti contributi spiccano i nomi di Cauchy, Weierstrass, Riemann, Liouville, ecc.
Partendo da definizioni del tutto naturali si perviene a conclusioni talvolta molto divese da quelle viste per le funzioni reali di variabile reale. Ad esempio, una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice derivabile nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$ quando esiste finito il limite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Tuttavia, contrariamente a quanto avviene in ambito reale,

- se f è derivabile in un aperto non vuoto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ allora f risulta derivabile *infinite volte* in Ω;
- se f è limitata e derivabile in tutto $\mathbb{C}$ allora f è costante.

L'**analisi compless**a fornisce *eleganti ed efficaci tecniche per il calcolo di integrali* su cammini nel piano complesso e, in particolare, di integrali estesi ad intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$, eventualmente generalizzati o impropri. Un esempio classico è quello dei cosiddetti *integrali di Fresnel:*

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x,$$

utilizzati nello studio della diffrazione della luce.

Sia ora $u \in L^1(\mathbb{R})$. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\hat{u}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x} u(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione $\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ così definita si chiama trasformata di Fourier (1768–1830) di u e l'applicazione $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$ è detta **trasformazione integrale di Fourier**. Essa rappresenta un *valido strumento per risolvere equazioni* *differenziali ordinarie o alle derivate parziali,* rivelatosi recentemente utile in molti altri contesti, quali l'*analisi dei segnali.*

Se non si dispone di funzioni sommabili in tutto $\mathbb{R}$ ma soltanto su ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}_0^+$ (casi significativi sono $\sin t$, $\cos t$ ed e^t) allora si può utilizzare la **trasformazione integrale di Laplace** (1749–1827), $\mathcal{L} : u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+) \mapsto U$, dove

$$U(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad s \in S_u \subseteq \mathbb{C},$$

particolarmente efficace nello studio del *problema di Cauchy per (sistemi di) equazioni differenziali, possibilmente con ritardo, equazioni integrali o integro-differenziali, circuiti elettrici e segnali.*

Intorno al 1950, L. Schwartz (1915–2002) formulò la **teoria delle distribuzioni**, una delle maggiori novità dell'analisi matematica del XX secolo. Essa generalizza alcuni concetti fondamentali, come quello di funzione e di derivata, nonché strumenti molto utili, fra cui la trasformazione di Fourier, portando in definitiva a un *nuovo modo di intendere le equazioni differenziali.* Ovviamente tale teoria non nacque dal nulla ma prese spunto da idee e problemi che per vari decenni erano stati oggetto di discussione fra analisti, fisici e ingegneri; si pensi ad esempio alla ben nota *delta di Dirac.*

Testi di referimento:

G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli Editore, 2001.
M. Bramanti, *Metodi di Analisi Matematica per l'Ingegneria,* Società Editrice Esculapio, 2019.
G. Di Fazio - M. Frasca, *Metodi Matematici per l'Ingegneria,* Monduzzi Editore, 2009.
F. Gazzola - F. Tomarelli - M. Zanotti, *Analisi complessa. Trasformate. Equazioni differenziali,* Società Editrice Esculapio, 2016.

Gli Studenti interessati possono contattarmi per e-mail all'indirizzo:
marano@dmi.unict.it
Grazie della cortese attenzione.