Giocando con la separabilità e non solo ...

Performance minima di un matematico stipendiato

Teorema di incompletezza. *(K. Godel, 1931) La teoria degli insiemi (e quindi la matematica in generale) contiene asserzioni indecidibili.*

Ipotesi del continuo (Cantor): Se $S \subseteq \mathbb{R}$ allora o esiste una funzione surgettiva $f : \mathbb{N} \to S$ o esiste una funzione surgettiva $f : S \to \mathbb{R}$.

in breve: $\quad \mathrm{CH} \equiv 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Problema n. 1 di Hilbert: è vera l'ipotesi del continuo?

Risposta 1. *(K. Godel, 1940) è consistente con ZFC assumere l'ipotesi del continuo CH vera, vale a dire $\neg$CH non è dimostrabile.*

Risposta 2. *(P. Cohen, 1963) È consistente con ZFC assumere CH falsa, vale a dire CH non è dimostrabile.*

Conclusione. *CH è un'asserzione indecidibile.*

L'assioma di Martin (MA) è l'enunciato:

"Se $\kappa < 2^{\aleph_0}$ e $(P, \leq)$ un ordinamento parziale in cui ogni anticatena è al più numerabile, allora per ogni collezione $\mathcal{D}$ di sottoinsiemi densi di P con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ esiste un filtro $G \subseteq P$ tale che $G \cap D \neq \emptyset$ per ogni $D \in \mathcal{D}$".

$$\text{CH} \longrightarrow \text{MA}$$

Teorema. *(Solovay, 1967) (MA+¬CH) è consistente con ZFC.*

Un esempio in topologia generale

Uno spazio X si dice separabile se contiene un sottoinsieme A denso e numerabile. (A denso in X significa che per ogni aperto non vuoto U risulta $U \cap A \neq \emptyset$)

Proposizione. *Il prodotto di due spazi separabili è separabile.*

Uno spazio X ha cellularità numerabile se ogni famiglia di aperti non vuoti a due a due disgiunti di X è al più numerabile.

Piccolo esercizio: Ogni spazio separabile ha cellularità numerabile.

Problema. *è vero che il prodotto di due spazi con cellularità numerabile ha ancora cellularità numerabile?*

Risposta. *L'enunciato "Il prodotto di due spazi con cellularità numerabile ha ancora cellularità numerabile" è indecidibile.*

Più precisamente:
a) Assumendo MA+¬CH è vero;
b) assumendo $\diamondsuit$ è falso.

Uno spazio topologico X ha pre-calibro $\aleph_1$ se ogni famiglia non numerabile di aperti non vuoti contiene una sottofamiglia non numerabile con la proprietà dell'intersezione finita.

La prova di a) si basa su:

Teorema 1. *(MA+¬CH) Ogni spazio con cellularità numerabile ha pre-calibro $\aleph_1$.*

Teorema 2. *(ZFC) Se X ha pre-calibro $\aleph_1$ e Y ha cellularità numerabile, allora $X \times Y$ ha cellularità numerabile.*

Un esempio tra topologia e analisi reale

Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ si dice raro (nowheredense) se $\overline{S}$ ha interno vuoto.

Proposizione. $\mathbb{R}$ *non può essere ricoperto con una famiglia numerabile di insiemi rari.*

Problema. *Esiste un ricoprimento raro di* $\mathbb{R}$ *di cardinalità minore del continuo, cioè* $< 2^{\aleph_0}$*?*

Ovviamente NO se vale l'ipotesi del continuo CH.
Molto meno ovviamente NO se vale l'assioma di Martin MA!

Risposta. *Asserzione indecidibile.*

Un esempio in teoria della misura

Proposizione. *Ogni sottoinsieme numerabile di* $\mathbb{R}$ *ha misura di Lebesgue nulla.*

Problema. *Se* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $|A| < 2^{\aleph_0}$ *è vero che la misura di Lebesgue di* A *è zero?*

Ovviamente SI se vale l'ipotesi del continuo.
Molto meno ovviamente SI se vale l'assioma di Martin!

Risposta. *Asserzione indecidibile.*

Un problema famoso

– Uno spazio X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di X contiene sottoricoprimenti finiti.

– Uno spazio X è primo numerabile se ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Problema. *(P. S. Aleksandroff, 1920) Sia X uno spazio compatto T_2 primo numerabile. È vero che $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, ovvero esiste una funzione surgettiva $f : \mathbb{R} \to X$?*

Soluzione. *(A. V. Arhangek'skiĭ, 1969) Ogni spazio primo numerabile T_2 Lindelöf (in particolare compatto) ha cardinalità al più il continuo.*

Teorema. *(I. Juhàsz, 1970) Se X è uno spazio primo numerabile T_2 con cellularità numerabile, allora X ha al più la cardinalità del continuo.*

Un problema ancora aperto

Uno spazio X si dice omogeneo se per ogni coppia di punti $y, z \in X$ esiste un omeomorfismo $f : X \to X$ tale che $f(y) = z$.

Ogni gruppo topologico è omogeneo.

Teorema. *Ogni gruppo topologico compatto ha cellularità numerabile.*

Problema. *Sia X uno spazio omogeneo compatto. È vero che la sua cellularità non supera il continuo? In altre parole, se $\{U_s : s \in S\}$ è una collezione di aperti non vuoti a due a due disgiunti di X allora $|S| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Due giochi topologici

Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{D}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi densi di X.

Il gioco della separabilità $G_1(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ ha due giocatori I e II e si svolge in $\mathbb{N}$ mosse.

Alla prima mossa I sceglie un insieme denso D_1 e II risponde prendendo un punto $x_1 \in D_1$. In generale, alla mossa $n \in \mathbb{N}$ I sceglie un insieme denso D_n e II risponde prendendo un punto $x_n \in D_n$.

Regola: II vince se e solo se alla fine della partita $D_1, x_1; \ldots ; D_n, x_n; \ldots$ l'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è denso.

Sia $Seq(\mathcal{D})$ la collezione di tutte le sequenze finite di elementi di $\mathcal{D}$.

Una strategia per II è una funzione

$$\sigma : Seq(\mathcal{D}) \to X$$

tale che $\sigma(D_1, \dots, D_n) \in D_n$.

Definizione importante: σ è una strategia vincente se II vince sempre giocando in accordo con σ.

Formalmente: per ogni sequenza di insiemi densi $\{D_1, \dots, D_n, \dots\}$ alla fine della partita

$$D_1, \sigma(D_1); \dots ; D_n, \sigma(D_1, \dots, D_n); \dots$$

l'insieme $\{\sigma(D_1), \sigma(D_1, \dots, D_n), \dots\} \in \mathcal{D}$.

Dato uno spazio topologico X una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti non vuoti si dice una π-base se per ogni aperto non vuoto U di X esiste un $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subseteq U$.

Teorema. *Se X ha una π-base numerabile, allora II ha una strategia vincente in $G_1(\mathcal{D}, \mathcal{D})$.*

Dim. Sia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una π-base per X. La strategia di II consiste alla mossa n nella scelta di un punto $x_n \in B_n \cap D_n$.

Formalmente, fissata una funzione di scelta $\phi : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$, per ogni sequenza finita $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$, porremo $\sigma(D_1, \ldots, D_n) = \phi(B_n \cap D_n)$.

Verifichiamo che σ è vincente, ovvero che l'insieme $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è denso. Dato un aperto non vuoto U esiste un $B_k \subseteq U$ e pertanto $x_k \in U \cap A$. $\square$

Teorema. *Sia X uno spazio topologico T_3. Se II ha una strategia vincente in $G_1(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, allora X ha una π-base numerabile.*

Il gioco $G_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ è analogo a $G_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$, ma alla mossa n se I gioca D_n allora II risponde prendendo un sottoinsieme finito $F_n \subseteq D_n$.

Alla fine della partita II vince se e solo se l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è denso.

Una strategia per II in $G_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ è una funzione $\sigma : Seq(\mathcal{D}) \to [X]^{<\aleph_0}$ tale che $\sigma(D_1,\dots,D_n) \subseteq D_n$.

Ovviamente se II ha una strategia vincente in $G_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ allora II ha anche una strategia vincente in $G_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$.

$C_p(X)$ è l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$ con la topologia della convergenza puntuale. Un intorno basico per $f \in C_p(X)$ è l'insieme $M(f; x_1,\dots,x_n;\varepsilon) = \{g \in C_p(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, 1 \le i \le n\}$.

Teorema. *In $C_p([0,1])$ II ha una strategia vincente in $G_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$, ma non in $G_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$.*