

Sistemi Dinamici

Prof. Vittorio Romano

Introduzione ai sistemi dinamici discreti e continui
Sistemi dinamici lineari e non lineari
Punti di equilibrio e stabilità
Periodicità e caos
Frattali

Programma completo:

1. *Introduzione ai sistemi dinamici.* Definizioni ed esempi: conto bancario, oscillatore armonico, pendolo semplice, crescita economica di uno stato, modello di Malthus, modelli logistici, dinamica di popolazioni, modello preda - predatore, evoluzioni di pandemie.
2. *Sistemi dinamici lineari.* Matrice dei coefficienti del sistema lineare diagonalizzabile, esponenziale di una matrice. Stabilità e instabilità lineare. Rappresentazione geometrica mediante campi vettoriali. Matrice non diagonalizzabile. Ritratti di fase in dimensione uno e due. Punto sella, nodo, fuoco, centro, pozzo e sorgente.
3. *Sistemi non lineari.* Punti fissi: caso discreto e continuo. Stabilità e instabilità dei punti fissi. Stabilità globale. Linearizzazione. Punti di equilibrio iperbolici.
Teoremi della varietà stabile e di Hartman-Grobman. Sistemi differenziali topologicamente equivalenti e topologicamente coniugati. Esempi. Metodo di Lyapunov. Teorema di Lyapunov (stabilità, instabilità e stabilità asintotica). Teorema di Dirichlet-Lagrange.
Sistemi gradiente. Insiemi alfa-limite e omega-limite di una traiettoria. Sistemi hamiltoniani. Insiemi limiti e attrattori. Orbita limite. Orbite periodiche, cicli limiti, cicli separatori. Ciclo limite stabile, semi-stabile, instabile, asintoticamente stabile. Orbite omocline ed eterocline.
Mappa di Poincaré. Enunciato del teorema di esistenza della mappa di Poincaré e di Poincaré-Bendixon.
Cenni di modelli matematici delle epidemie.

4. *Sistemi non lineari, periodicità e caos*. Sistemi strutturalmente stabili e instabili. Sistemi dinamici continui. Parametro di biforcazione. Diagramma di biforcazione. Biforcazione sella-nodo, transcritica, a forchetta, di Hopf. Enunciato del teorema di biforcazione di Hopf. Sistema di Lorenz, attrattore strano. Caso discreto. Periodicità, stabilità dei punti periodici. Biforcazione tangente (sella-nodo), a forchetta (di periodo doppio), transcritica. Esempi. Caos e dinamica simbolica.

5. *Frattali*. Idea di frattale. Insieme di Cantor dei terzi medi. Insieme di Cantor. Triangolo di Sierpinski. Fiocco di neve di Koch. Contrazioni. Teorema di Banach-Caccioppoli. Norma spettrale. Insiemi compatti e distanza di Hausdorff. Metrica di Hausdorff. Sistemi di funzioni Iterate (IFS). Applicazioni. Dimensione frattale (di Kolmogorov), applicazioni.

Modalità di esame:

elaborato di fine corso su di un problema applicativo (facoltativamente in ambiente Matlab).

Prerequisiti: analisi I e II.

Principali testi di riferimento

1. E. Scheinerman, *Invitation to Dynamical Systems*, testo disponibile online: <http://www.ams.jhu.edu/~ers/invite/book.pdf>
2. L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed. - New York: Springer-Verlag, 2001.

Per eventuali chiarimenti: romano@dmi.unict.it