Seminario per gli Studenti

28 - 11 - 2014

"Curve razionali, viste attraverso un microscopio algebrico ed un cannocchiale geometrico"

0. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

cioè l'insieme delle classi di equivalenza della relazione

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0 \dots y_n) \iff \text{esiste } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

$$(y_0 \dots y_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$$

$p \in \mathbb{P}^n$ uguale alla classe di equivalenza di $(x_0, \dots, x_n)$ verrà denotato

$p = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ e $(x_0, \dots, x_n)$ è detto un vettore di coordinate omogenee per p

Ricordiamo che se $x_i \neq 0$ in $p = (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n)$ allora esiste unico rappresentante di p della forma

$$(z_0 : \dots : 1 : \dots : z_n) \qquad \text{con } z_j = \frac{x_j}{x_i}$$

Allora $(z_0, \dots, \hat{z_i}, \dots z_n)$ ~~è detto~~ sono le coordinate affini di p nell'aperto

$$U_i = \{ q \in \mathbb{P}^n \mid x_i(q) \neq 0 \}$$

<u>Esempio</u>

$$\mathbb{P}^1 = \{ (x_0 : x_1) \mid (x_0, x_1) \neq (0,0) \}$$

$$= \{ (z : 1) \mid z \in \mathbb{C} \} \cup \{ (1 : w) \mid w \in \mathbb{C} \}$$

i due aperti fondamentali.

se $p = (x_0 : x_1) = (z : 1) = (1 : w)$ allora $w = \frac{1}{z}$

(formula di cambiamento di coordinate fra i due aperti affini)

1. Varietà algebriche proiettive

Consideriamo $S = \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate $x_0, \dots, x_n$

Ricordiamo che $f \in S$ si dice <u>omogeneo</u> se in f compaiono solo monomi dello stesso grado

Una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema del tipo

$$X : \begin{cases} f_1(x_0 \dots x_n) = 0 \\ - - - - \\ f_r(x_0 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

con $f_1, \dots, f_r \in S$ polinomi omogenei

Denotiamo con $I_X = (f_1 \dots f_r) \subseteq \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$

l'ideale generato da $f_1 \dots f_r$, cioè

$$I_X = \{ a_1 f_1 + \dots + a_r f_r \mid a_i \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n] \}$$

Introduciamo delle ipotesi aggiuntive

- X ridotta e irriducibile (o più semplicemente detta <u>irriducibile</u>)

se I_X è un <u>ideale primo</u> *

($a b \in I_X \Rightarrow a \in I_X$ oppure $b \in I_X$)

In tal caso risultati generali dell'<u>algebra commutativa</u> consentono di provare che

1) non è possibile decomporre $X = X_1 \cup X_2$ $\quad X_i \subsetneq X$ varietà algebriche più piccole

2) $g \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$ tale che $g_{|X} \equiv 0$

$\Rightarrow g \in I_X$

<u>Esempio</u> $f \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$

allora $X = V(f) = \{(x_0 : \dots : x_n) \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$

è detta ipersuperficie di equazione $f = 0$

X è irriducibile $\iff$ f è irriducibile

<u>Spazio tangente</u> immerso di un ipersuperficie in $p \in X$

Definiamo

$$T_p X = \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_0}(p)\, x_0 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\, x_n = 0 \right\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

se $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) \neq (0 \dots 0)$

allora $t_p X$ esiste come <u>iperpiano di $\mathbb{P}^n$</u>

e diciamo che $p \in X$ <u>è un punto non singolare</u>

<u>Algebra</u>: Se f è irriducibile, allora esiste g omogeneo $g|_X \neq 0$ tale che ogni punto $p \in X \setminus V(g)$ è non singolare

Sulla nozione di <u>punto generale</u>
di una varietà algebrica irriducibile

Una proprietà P è detta
valere per un punto generale $p \in X$
se esiste $g \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$ $g_{|X} \not\equiv 0$, omogenea
tale che
P vale per tutti i punti
$p \in X \setminus V(g)$

" Una ipersuperficie irriducibile
è liscia nel suo punto generale "

Dimensione

$$X = \begin{cases} f_1 = 0 \\ \dots \\ f_r = 0 \end{cases}$$ irriducibile

allora

Algebra $\longrightarrow$ esiste $s \geq 0$ intero tale che

per un punto generale $p \in X$

esistono $f'_1 \dots f'_s \in \{f_1, \dots, f_r\}$

tali che

$\nabla f'_1(p) \dots \nabla f'_s(p)$ sono linearmente

indipendenti e per ogni $i = 1 \dots r$

$$\nabla f_i(p) \in \mathcal{L}(\nabla f'_1(p), \dots, \nabla f'_s(p))$$

Allora si pone

$$n - s \doteq \dim X$$

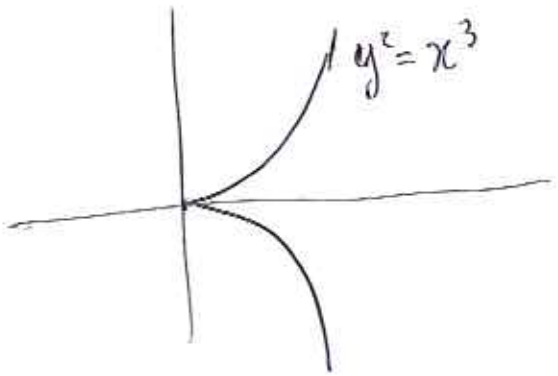
Geometricamente:

$$\dim t_p(V(f'_1)) \cap \dots \cap t_p(V(f'_s)) = n - s$$

2. <u>X si dice curva algebrica (irriducibile)</u>

<u>se X è irriducibile di dimensione $= 1$</u>

<u>Es</u> le curve algebriche in $\mathbb{P}^2$ sono le varietà $X = V(f(x_0, x_1, x_2))$ con f irriducibile



$\bar{f} = y^2 - x^3$

$\downarrow$ omogeneizzo

$f = x_1^2 x_2 - x_0^3$

<u>OSS</u> per definire una curva algebrica $X \subset \mathbb{P}^n$ occorrono almeno $n-1$ polinomi.

Se $f_1 \dots f_{n-1}$ bastano a definire

$$X = \begin{cases} f_1 = 0 \\ \dots \\ f_{n-1} = 0 \end{cases}$$

allora X si dice la completa intersezione di $V(f_1) \dots V(f_{n-1})$

Funzioni razionali su una varietà algebrica

X varietà algebrica $\qquad g \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n] \quad g|_X \not\equiv 0$

$f \in \mathbb{C}[x_0 \dots x_n]$

$\deg f = \deg g$

Allora $\dfrac{f}{g} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione razionale su X

Mappe ~~fra va~~ razionali fra varietà algebriche

$$\begin{array}{ccc} \phi : X & \dashrightarrow & Y \\ \cap\!| & & \cap \\ \mathbb{P}^m & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

$\phi(P) = (\phi_0(P) \dots \phi_n(P))$ $\qquad \phi_i$ funzioni razionali

ϕ si dice regolare in P se ϕ_i sono definite in P per ogni $i = 0 \dots n$.

Sia ora di nuovo

$X \subset \mathbb{P}^n$ una curva (algebrica irriducibile)

X si dice liscia se

per ogni $p \in X$ esistono

$n-1$ polinomi $g_1 \dots g_{n-1} \in I_X$

con $\nabla g_1(p) \dots \nabla g_{n-1}(p)$ linearmente indipendenti

Si pone in questo caso

$$t_p X = t_p V(g_1) \cap \dots \cap T_p V(g_{n-1})$$

$\dim t_p X = 1$ retta tangente in p

<u>Teorema (di desingolarizzazione)</u>

Data curva proiettiva qualsiasi $X \subset \mathbb{P}^n$ esiste <u>curva proiettiva liscia</u> $Y \subset \mathbb{P}^m$ ed una mappa $\phi : Y \longrightarrow X$ razionale definita per ogni $p \in Y$, che sia una biiezione al di fuori di un insieme finito di punti (in X e in Y)

<u>mappa birazionale</u>

Il "microscopio algebrico alla sua massima risoluzione"

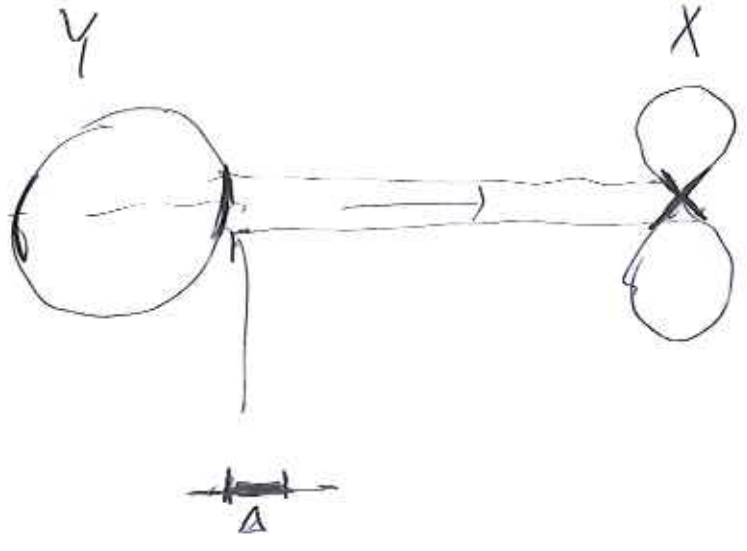
Dal teorema precedente, o anche in modo indipendente da esso, segue che una curva $X \subset \mathbb{P}^n$ qualsiasi può essere ricoperta da aperti (nella topologia classica indotta da $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}$)

immagini di mappe del tipo

$$\Delta \ni z \longmapsto (g_0(z) : \dots : g_n(z)) = \phi(z)$$

Δ disco in $\mathbb{C}$, e.g. $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$

con $g_i(z)$ funzioni analitiche, cioè del tipo $g_i(z) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} a_n z^n$



(dal teorema di desingolarizzazione)

Quindi tutte le curve algebriche sono

"localmente parametrizzabili tramite funzioni analitiche"

Domanda: lo sono anche mediante funzioni razionali?

cioè si possono scegliere $\phi_0(z) \dots \phi_n(z)$ in modo da avere

$$\phi_i(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad p, q \text{ polinomi?}$$

<u>Risposta: in generale NO!</u>

<u>Esempio</u> la curva

$$E: \quad y^2 = x^3 + x + 1$$

o in forma proiettiva:

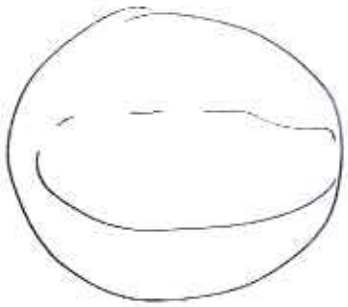
$$x_2 x_1^2 = x_0^3 + x_0 x_2^2 + x_2^3$$

non ammette alcuna mappa razionale non costante $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow E$, quindi neanche $\mathbb{P}^1 \longrightarrow E$

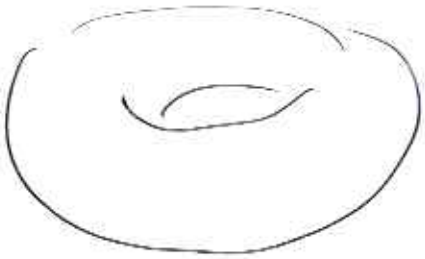
Motivo: Topologico

Come varietà topologiche

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ =



E =



e non esiste alcuna mappa continua suriettiva fra i due (C^∞) spazi

---

3. Def Curva razionale:

curva $X \subset \mathbb{P}^n$ che ammette una mappa birazionale

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$$

Studio delle mappe razionali $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$

$$f(x_0 : x_1) = \left(f_0(x_0, x_1) : \dots : f_n(x_0, x_1) \right)$$

con $f_i(x_0, x_1) = \dfrac{p_i(x_0, x_1)}{q_i(x_0, x_1)}$ $\quad p_i, q_i$: polinomi

dello stesso grado

Allora si può assumere $q_i(x_0 : x_1) = q$

$\forall i$, passando al massimo comune divisore

(e restringendo l'insieme dei punti su cui f è definita)

e poi rimuovere questo denominatore comune, e ridurre in modo che $p_0 \dots p_n$ coprim

(allargando l'insieme di definizione a tutto $\mathbb{P}^1$)

Risultato: una mappa razionale

$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ può essere

estesa a tutto $\mathbb{P}^1$

D'ora in poi assumeremo quindi

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$f = (f_0 \dots f_n)$ $\qquad$ $f_i \in \mathbb{C}[x_0 : x_1]$ omogenei dello stesso grado d

f_i coprimi

Grado di una varietà algebrica

supponiamo $\dim X = n - s$, $X \subset \mathbb{P}^n$

Allora per un $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^n$ sufficientemente generale

$$\# (X \cap \mathbb{P}^s) = d \text{ punti distinti}$$

$d \doteq$ grado di X

<u>Es</u> : $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X \subset \mathbb{P}^n$ mappa birazionale su X e supponendo

$f = (f_0 : \dots : f_n)$ $\quad$ f_i polinomi omog. di grado d

allora $\deg X = d$

Dim

Infatti per $H \subset \mathbb{P}^n$ iperpiano generale, di equazione $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$ si ha corrispondenza biunivoca

$$H \cap X \longleftrightarrow \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 \mid \overbrace{a_0 f_0(x_0, x_1) + \dots + a_n f_n(x_0, x_1)}^{\text{polinomio grado } d} = 0\}$$

n radici distinte $\square$

Riparametrizzazioni

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} X \subset \mathbb{P}^n \qquad \phi \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1$$

definisce la nuova parametrizzazione

$$\bar{f} = f \circ \phi$$

Si può dimostrare che le parametrizzazioni birazionali di una curva razionale data X si ottengono tutte da una fissata $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ in questo modo

Dimostrazione

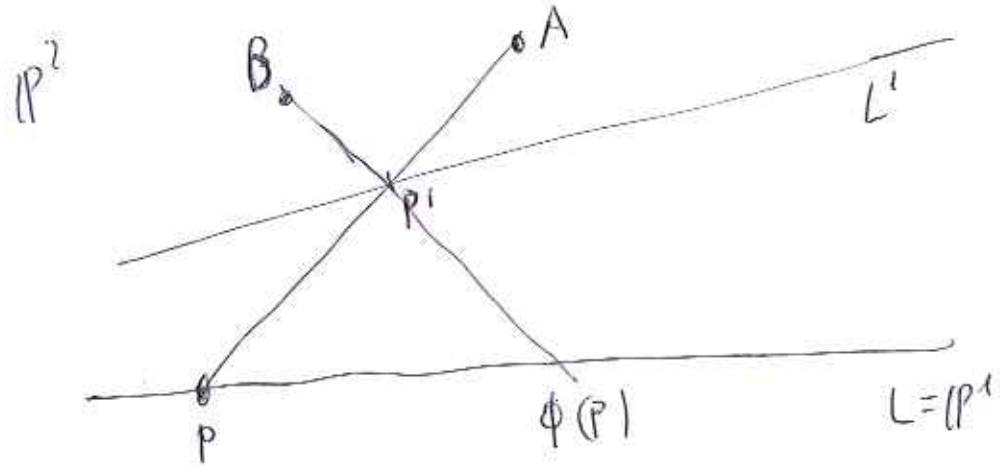
$$\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 = \{ g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \text{ di grado } 1 \} =$$

$$= \left\{ (x_0 : x_1) \mapsto (a x_0 + b x_1 : c x_0 + d x_1) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2) \right\}$$

$$= PGL(2) = \frac{GL(2)}{\mathbb{C}^*}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Classicamente le mappe di $PGL(2)$ si ottengono geometricamente nel modo seguente



$$(A, B, L') \rightsquigarrow \text{mappa } \phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

<u>Dim</u> (forma debole)

Sappiamo che $GL(2)$ è generato dalle matrici elementari $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{C}^*$

che corrispondono alle trasformazioni

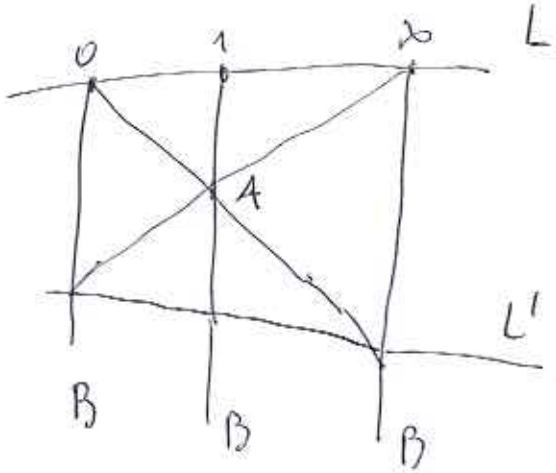
1) $(x_0 : x_1) \longrightarrow (x_1 : x_0)$ $\quad z \to \frac{1}{z}$ inversione

2) $(x_0 : x_1) \longmapsto (x_0 : c x_0 + x_1)$ $\quad z \to z + c$ traslazione

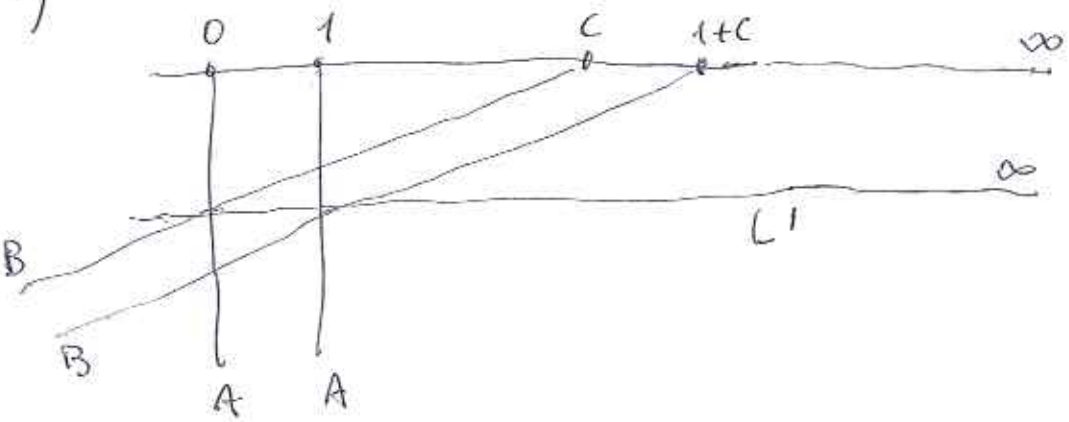
3) $(x_0 : x_1) \longrightarrow (x_0 : d x_1)$ $\quad z \to dz$ dilatazione

che possono essere ottenute geometricamente nei modi seguenti; ponendo $0 = (1:0)$, $1 = (1:1)$, $\infty = (0:1)$

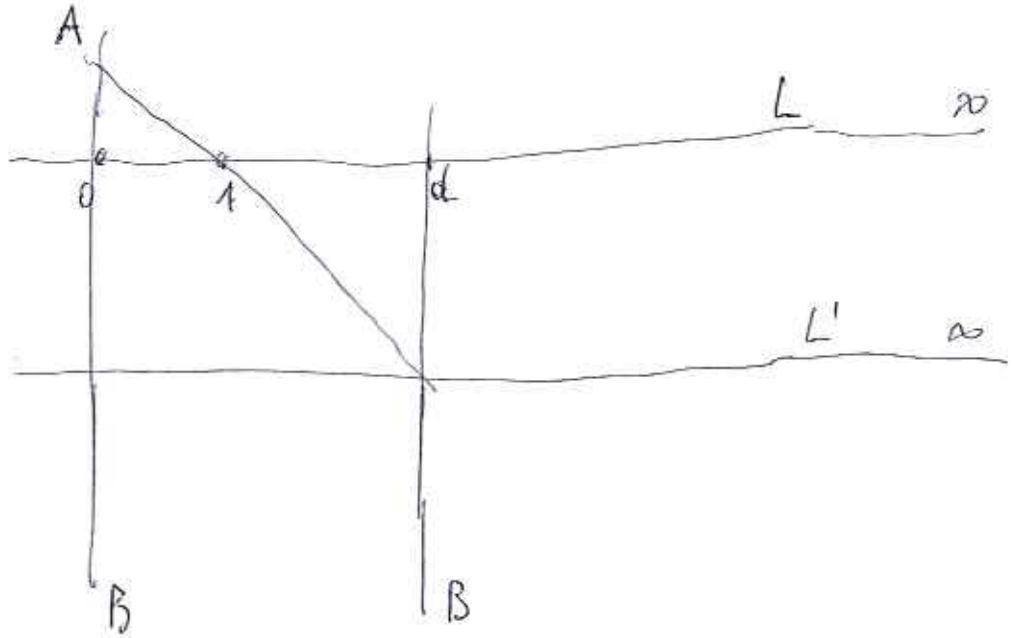
1)



2)



3)



Abbiamo anche usato il

<u>Teorema</u> una $\phi \in PGL(n+1) = \frac{Gl(n+1)}{\mathbb{C}^*}$

è determinata dalla sua azione

su $n+2$ punti $p_1 \dots p_{n+2} \in \mathbb{P}^n$

in posizione lineare generale

Curve razionali normali

Consideriamo una mappa

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

le cui componenti $(f_0 : \dots : f_n)$ siano polinomi $f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ omogenei di grado n linearmente indipendenti

Allora $X = \operatorname{Im} f$ si dice una curva razionale normale di grado n

Caso particolare:

$$v_n : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad \text{definita da}$$

$$v_n(x_0 : x_1) = (x_0^n : x_0^{n-1} x_1 : \dots : x_1^n)$$

base dei monomi dei polinomi omogenei di grado n in $\mathbb{C}[x_0, x_1]$

Si vede facilmente che
una curva razionale normale
X qualsiasi è proiettivamente
equivalente in $\mathbb{P}^n$ a $X_n = \nu_n(\mathbb{P}^1)$

$$\begin{tikzcd}
 & X_n \arrow[d] & \subseteq & \mathbb{P}^n \arrow[d, "\phi"] \\
\mathbb{P}^1 \arrow[ur, "\nu_n"] \arrow[dr, "f"'] & & & \\
 & X & \subseteq & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}$$

con $\phi \in PGL(n+1)$

Quindi dal punto di vista geometrico-
proiettivo è sufficiente studiare X_n

Alcune proprietà di X_n

1) Presi $n+1$ punti distinti $p_1 \dots p_{n+1} \in X_n$, questi sono sempre linearmente indipendenti

Dim: Situiamoci nell'aperto affine dei punti $(z:1) \in \mathbb{P}^1$, allora possiamo scrivere

$$v_n(z:1) = (z^n : z^{n-1} : \dots : z : 1)$$

Per i punti distinti $p_i = (z_i : 1)$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} v_n(p_1) \\ \\ v_n(p_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^n & z_1^{n-1} & \dots & 1 \\ z_2^n & z_2^{n-1} & & 1 \\ \vdots & & & \\ z_{n+1}^n & z_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante (di Vandermonde) è $\prod_{i<j} (z_i - z_j) \neq 0$

2) $X \subset \mathbb{P}^n$ curva di grado n non contenuta in alcun iperpiano (X "non degenere")

è sempre una curva razionale normale

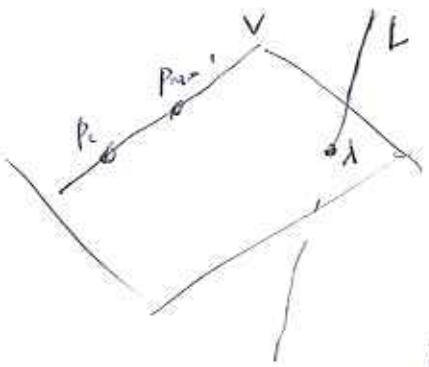
<u>Dim</u> Presi $p_1 \dots p_{n-1} \in X$ punti generali

questi generano un sottospazio proiettivo

$V = \langle p_1 \dots p_{n-1} \rangle \cong \mathbb{P}^{n-2}$

(è sufficiente prendere i primi $n-1$ punti di $n+1$ punti distinti $p_1 \dots p_{n+1} \in X$ che generano tutto $\mathbb{P}^n$, che esistono perché X è non degenere)

Consideriamo il fascio di iperpiani $H(\lambda)$ contenenti V $(\lambda \in L)$



Allora $H(\lambda) \cap X$ = 1 solo punto per λ generale

La mappa

$$\mathbb{P}^1 = L \ni \lambda \longmapsto H(\lambda) \cap X$$

è una parametrizzazione birazionale

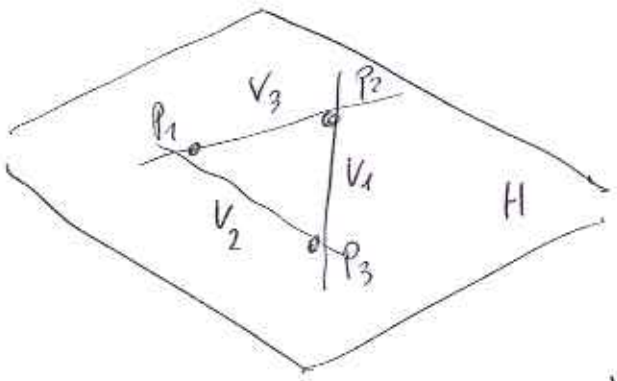
Poiché $\deg X = n \Rightarrow X$ curva razionale normale $\square$

Costruzione di Steiner delle curve razionali normali

$\mathbb{P}^n \ni p_1 \dots p_n$ punti linearmente indipendenti

$V_i = \langle p_1 \dots \hat{p_i} \dots p_n \rangle \cong \mathbb{P}^{n-2}$ per ogni i

$H = \langle p_1 \dots p_n \rangle$ iperpiano



Parametrizziamo i fasci di iperpiani contenenti ogni V_i tramite $H_i(\lambda)$ in modo che

$H = H_1(\lambda_1) = \dots = H_n(\lambda_n)$ con $\lambda_1 \dots \lambda_n$ distinti in $\mathbb{P}^1$

Allora dimostriamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{P}^1$

$H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda) = 1$ punto

<u>1° caso</u> $H_i(\lambda) \neq H$ per ogni i

Poichè $V_1 \cap \dots \cap V_m = \emptyset$ allora

se $p \in H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_m(\lambda) \cap H$ ~~segue~~

deve essere $p \notin V_i$ per qualche i

Allora $H_i(\lambda) = \langle V_i, p \rangle \subseteq H$

$\Rightarrow$ $H_i(\lambda) = H$, assurdo per l'ipotesi $H_i(\lambda) \neq H$

Allora $H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_m(\lambda) \cap H = \emptyset$

e quindi lo spazio lineare

$H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_m(\lambda)$ deve ridursi a

un punto.

<u>2° caso</u> se $H = H_i(\lambda)$ allora per ogni $j \neq i$

$$H_j(\lambda) \cap H_i(\lambda) = H_j(\lambda) \cap \langle p_1 \dots p_m \rangle = V_j$$

Segue che

$$H_1(\lambda) \cap \dots \cap \underset{\substack{\| \\ H}}{H_i(\lambda)} \cap \dots \cap H_m(\lambda) = V_1 \cap \dots \cap \widehat{V_i} \cap \dots \cap V_m = P_i$$

Pertanto la mappa

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

tale che $f(\lambda) = H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda)$

parametrizza una curva razionale

$$C = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} \left(H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda) \right)$$

e si può provare che questa parametrizzazione è biunivoca

Per provare che C è una curva razionale normale è sufficiente dimostrare che $\deg C = n$

Sappiamo già $C \cap H = \{p_1, \dots, p_n\}$

ma ciò non basta: le intersezioni p_i potrebbero avere molteplicità maggiore di 1, H non è generale!

Operiamo in modo differente:

Consideriamo i punti P_1, P_n della base

e parametrizziamo con

$\underline{\lambda} \in \mathbb{P}^{n-1}$ le rette

$\ell_1(\underline{\lambda})$ passante per P_1

$\ell_n(\underline{\lambda})$ passante per P_n

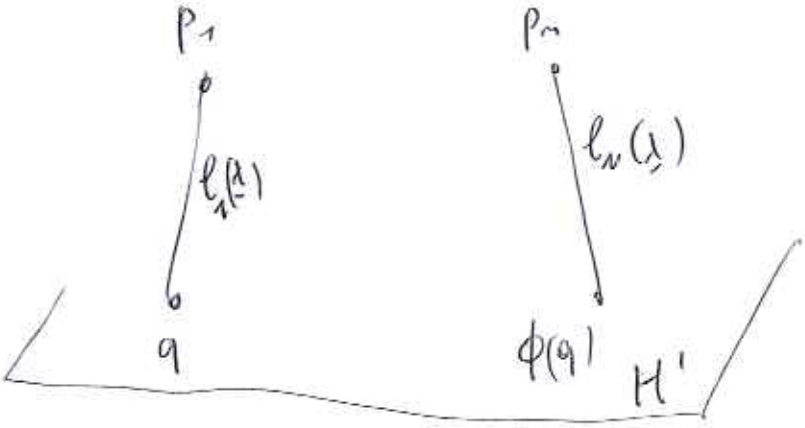
Poniamo fatto in modo tale che, ad esempio per $\underline{\lambda} = (\lambda : 0 : \dots 0)$ si ottenga

$$\ell_1(\underline{\lambda}) = H_2(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda)$$

$$\ell_n(\underline{\lambda}) = H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_{n-1}(\lambda)$$

che sono ovviamente rette

Con tale famiglia di rette si può costruire la proiettività $\phi : H' \to H'$



Allora ϕ, essendo una proiettività di $H' \cong \mathbb{P}^{n-1}$, ha al più n punti fissi indipendenti (autovettori indipendenti) (ϕ corrisponde a una classe di matrici $A \in Gl(n)$ a meno della proporzionalità)

Osserviamo infine che

$$C \cap H' = \{ q \in H' \mid q = H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda) \cap H' \} =$$

$$= \{ q \in H' \mid \phi(H_2(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda) \cap H') = H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_{n-1}(\lambda) \cap H' \}$$

$$\subseteq \{ q \in H' \mid \phi(q) = q \}$$

e che $C \cap H'$ è costituita da un numero $\geq n$ di punti linearmente indipendenti

$$\Downarrow$$

questo numero è n $\square$

Che cosa si può dire delle curve razionali, ma non normali?

Moltissimo, e la ricerca è ancora in corso!

Esempio

Curve razionali $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$N_d = \#$ Curve razionali di grado d passanti per $3d-1$ punti generali di $\mathbb{P}^2$:

$N_2 = 1$, $N_3 = 12$, $N_4 = 620$, $N_5 = 87304$, $N_6 = 26312976$, ...

Calcoli effettuati da fisici teorici usando tecniche di "Conformal field Theory"

Dimostrate formule generali per N_d da M. Kontsevich (anni '90) usando Gromov - Witten - Theory