La bellezza della Matematica al servizio del mondo

Il problema dell'ostacolo

IL PROBLEMA DELL'OSTACOLO

Descriviamo il cosiddetto **problema dell'ostacolo** rappresentato dalla seguente figura:

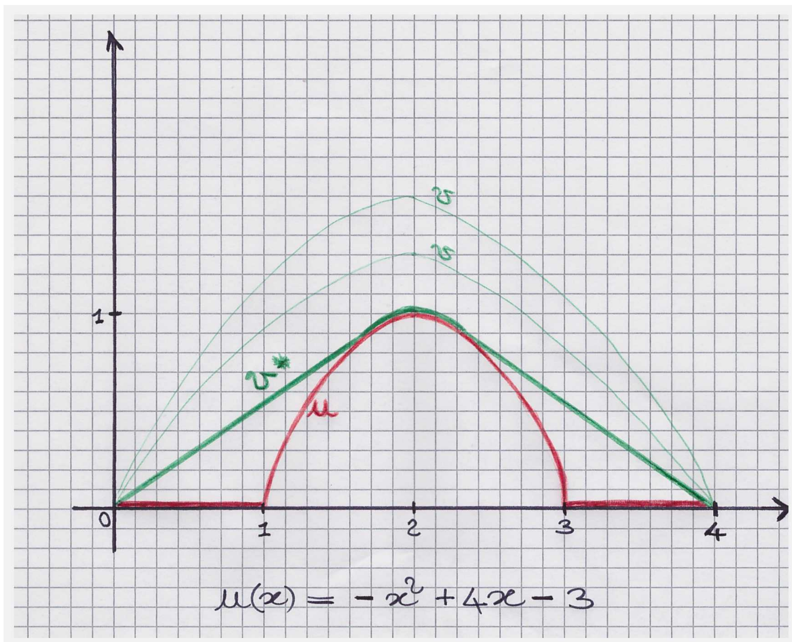

Figura 1: Problema dell'ostacolo

Sia $[0, 4]$ il nostro intervallo di riferimento.

Sia $u = u(x)$ reale definita nell'intervallo $[0, 4]$ dalla legge:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [\,0, 1\,[\\ -x^2 + 4x - 3 & \text{per } x \in [1, 3] \\ 0 & \text{per } x \in \,]\,3, 4\,]\,, \end{cases}$$

il cui grafico rappresenta il nostro ostacolo.

Risulta: $u(1) = u(3) = 0$, $u(2) = 1$ e $u''(x) = -2$, $\forall x \in [1, 3]$.

Vogliamo determinare la funzione non negativa v^*, di classe C^2 in $[0,4]$, nulla nei punti 0 e 4, il cui grafico è la curva di minima lunghezza sovrastante l'ostacolo o che si appoggia ad esso, ovvero la curva che rappresenta la configurazione d'equilibrio.

Definiamo l'insieme $\mathbb{K}$ delle configurazioni ammissibili:

$$\begin{aligned}\mathbb{K} = \big\{ v \in C^2([0,4]) \ \mid v\,(0) = v\,(4) = 0; \\ v\,(x) \geq 0, \ \ \forall\, x \in [0,4]\,; \\ v\,(x) \geq u\,(x)\,, \ \ \forall\, x \in [0,4] \big\}\,.\end{aligned}$$

Ci accorgiamo che la concavità delle configurazioni a cui siamo interessati deve essere rivolta verso il basso, cioè si deve avere, $\forall\, v \in \mathbb{K}$:

$$v''\,(x) \leq 0, \ \ \forall\, x \in [0,4]\,.$$

In particolare, riguardo la configurazione di equilibrio v^*, possiamo affermare che:

- la sua derivata seconda è non positiva:

$$v^{*\prime\prime}\,(x) \leq 0;$$

- nei punti in cui risulta $v^*\,(x) - u\,(x) > 0$, la curva grafico di v^* dovrà essere un segmento, per cui la derivata seconda si dovrà annullare, cioè:

$$v^{*\prime\prime}\,(x) = 0.$$

Queste informazioni possono essere rappresentate dalla seguente equazione:

$$v^{*\prime\prime}\,(x)\,(v^*\,(x) - u\,(x)) = 0, \ \ \forall\, x \in [0,4]\,. \tag{1}$$

Infatti,

- nei punti in cui $v^{*\prime\prime}(x) < 0$, deve essere $v^*(x) = u(x)$, cioè la curva grafico di v^* si appoggia all'ostacolo e risulta $v^{*\prime\prime}(x) = -2$;
- invece, nei punti in cui $v^*(x) > u(x)$, si ha $v^{*\prime\prime}(x) = 0$.

Proviamo che determinare $v^* \in \mathbb{K}$ soddisfacente la (1), cioè soddisfacente il problema di equilibrio, equivale a risolvere il seguente problema, che prende il nome di **Disequazione Variazionale**:

Trovare $v^* \in \mathbb{K}$ tale che

$$v^{*\prime\prime}(x)\left(v(x) - v^*(x)\right) \leq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,. \tag{2}$$

Dimostrazione

(1) $\Rightarrow$ (2)

Abbiamo osservato che dev'essere:

$$v^{*\prime\prime}(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in [0,4]\,. \tag{3}$$

Inoltre, per definizione di $\mathbb{K}$, si ha:

$$v(x) - u(x) \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,. \tag{4}$$

Da (3) e (4) segue:

$$v^{*\prime\prime}(x)\left(v(x) - u(x)\right) \leq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,,$$

ovvero:

$$v^{*\prime\prime}(x)\, v(x) - v^{*\prime\prime}(x)\, u(x) \leq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,. \tag{5}$$

Ricordiamo che, per ipotesi, vale la (1).

Da essa si ricava, in maniera immediata:

$$v^{*\prime\prime}(x)\,u(x) = v^{*\prime\prime}(x)\,v^{*}(x)\,,\ \forall\, x \in [0,4]\,.$$

Andando a sostituire nella (5) l'espressione trovata per $v^{*\prime\prime}(x)\,u(x)$, otteniamo:

$$v^{*\prime\prime}(x)\,v(x) - v^{*\prime\prime}(x)\,v^{*}(x) \leq 0,\ \ \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,,$$

cioè:

$$v^{*\prime\prime}(x)\,(v(x) - v^{*}(x)) \leq 0,\ \ \forall\, v \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in [0,4]\,.$$

Osserviamo che quest'ultima disequazione è la disequazione variazionale (2), di cui volevamo provare la validità.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Cominciamo ad osservare che, essendo $v^{*} \in \mathbb{K}$, risulta:

$$v^{*}(x) \geq u(x)\,,\ \forall\, x \in [0,4]\,.$$

Ora, in tutti i punti x di $[0,4]$ in cui si ha $v^{*}(x) = u(x)$, la (1) risulta banalmente soddisfatta.

Resta da provare la (1) nei punti x di $[0,4]$ in cui $v^{*}(x) > u(x)$.

Fissiamo allora ad arbitrio $x \in [0,4]$ tale che:

$$v^{*}(x) > u(x)\,. \tag{6}$$

Dobbiamo provare che $v^{*\prime\prime}(x) = 0$.

Dalla (6) segue che è possibile scegliere $v \in \mathbb{K}$ tale che:

$$u(x) < v(x) < v^*(x)$$

$$\Downarrow$$

$$v(x) - v^*(x) < 0. \tag{7}$$

Abbiamo precedentemente osservato che dev'essere $v^{*\prime\prime}(x) \leq 0$. Supponiamo per assurdo che risulti $v^{*\prime\prime}(x) < 0$. Tenendo conto della (7), otterremo immediatamente:

$$v^{*\prime\prime}(x)(v(x) - v^*(x)) > 0,$$

che è assurdo, perchè in contrasto con la disequazione variazionale (2), valida per ipotesi per ogni $v \in \mathbb{K}$. L'assurdo deriva dall'aver supposto $v^{*\prime\prime}(x) < 0$: dev'essere, quindi, $v^{*\prime\prime}(x) = 0$ e così, anche nel caso in cui $v^*(x) > u(x)$, la (1) risulta così provata.

$\square$

OSSERVAZIONE

Questo semplice problema presenta delle sorprese, infatti noi ci accorgiamo che la soluzione di equilibrio non può essere di classe $C^2([0,4])$: dove $v^*(x) = u(x)$ la derivata seconda vale -2 mentre altrove vale zero. Si ha, dunque, che la derivata seconda non esiste in due punti: i punti in cui le parti rettilinee si raccordano alla parte curva.

Ma c'è di più. Se l'ostacolo è del tipo indicato nella Figura 2:

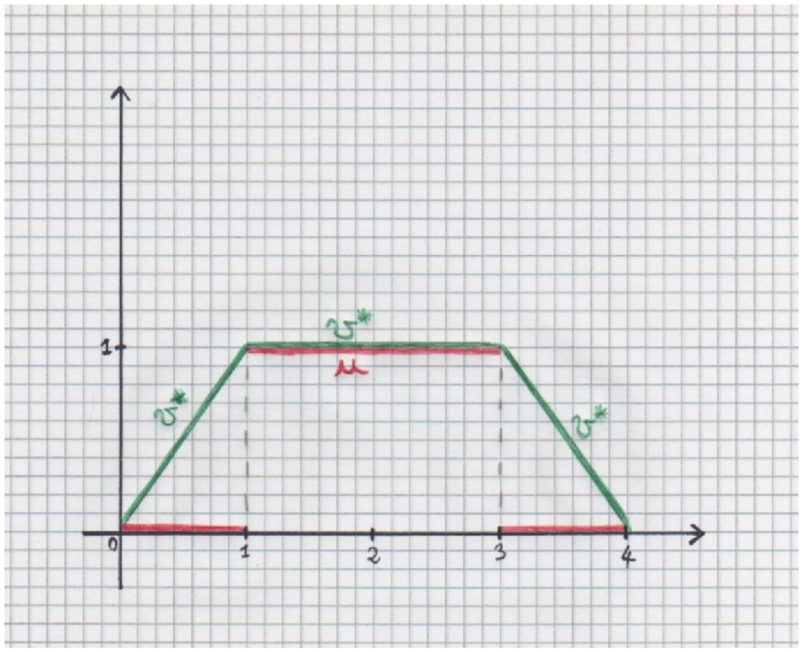

Figura 2: Caso particolare di ostacolo

cioè l'ostacolo è il grafico della funzione:

$$u\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [0,1] \\ 1 & \text{per } x \in \,]\,1,3\,[\\ 0 & \text{per } x \in [3,4]\,, \end{cases}$$

ci accorgiamo che:

- quando la soluzione $v^*\,(x)$ coincide con l'ostacolo, cioè per $x \in \,]\,1,3\,[$, risulta:

$$v^{*\prime}\,(x) = 0;$$

- mentre, se $x \in [0,4]$ è tale che $v^*(x) > u(x)$, si ha:

$$
\begin{aligned}
v^{*\prime}(x) &= 1 \qquad \text{per } \ x \in [0,1]\,, \\
v^{*\prime}(x) &= -1 \qquad \text{per } \ x \in [3,4]\,.
\end{aligned}
$$

Quindi, in questo caso, non esiste la derivata prima della soluzione nei punti $x = 1$ e $x = 3$.

CONCLUSIONI

Entrambi gli esempi mostrano che il nostro problema non è risolubile nella classe delle funzioni continue con le loro derivate. Mostrano anche che le derivate delle funzioni che entrano in gioco non sono definite in tutti i punti dell'insieme di definizione. Il secondo esempio mostra che questo fenomeno avviene addirittura per la derivata prima. Questa, ed altre situazioni, portano alla necessità di introdurre classi di funzioni in cui non si richiede la continuità e in cui le funzioni sono definite a meno di un insieme di misura nulla.

Abbiamo poi visto che richiedere l'esistenza della derivata seconda può essere eccessivo. Si suole allora indebolire la formulazione del problema (2) passando ad una formulazione integrale della (2), nel modo seguente:

$$
\int_0^4 v^{*\prime\prime}(x)\,(v(x) - v^*(x))\,dx =
$$

$$
= \underbrace{\left[v^{*\prime}(x)\,(v(x) - v^*(x))\right]_0^4}_{=0} - \int_0^4 v^{*\prime}(x)\,(v'(x) - v^{*\prime}(x))\,dx \leq 0, \ \forall v \in \mathbb{K}
$$

ottenendo, quindi, la disequazione variazionale:

$$\int_0^4 v^{*\prime}(x)\left(v'(x) - v^{*\prime}(x)\right) dx \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{K}, \tag{8}$$

considerando $\mathbb{K}$ una classe (grossomodo) del tipo:

$$\mathbb{K} = \{v(x) : [0,4] \to \mathbb{R}, \text{ di quadrato integrabile con la derivata } v'(x)$$
$$\text{e tale che } v(x) \geq u(x)\}.$$

L'integrabilità di cui si parla è quella di **Lebesgue**.

La **teoria delle Disequazioni Variazionali** ci permette di studiare adeguatamente la (8).