1) Sia $A = \{\underbrace{\{\emptyset\}}_{}, \underbrace{\emptyset}_{}\}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa

a) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ V

b) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ V

c) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ V

d) $\{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(A)$ F

<u>SOL</u>: $\mathcal{P}(A) = \{\underbrace{\emptyset}_{}, \underbrace{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}}_{= A}, \{\{\emptyset\}\}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{}\}$

2) Sia P la proposizione (falsa)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera

a) P equivale a: $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ oppure $y \neq 0$ F (è la contronominale dell'implicare $\Leftarrow$)

b) $\cancel{P}$ è: $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ entrambi non nulli t.c. $xy = 0$

c) P equivale a: $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ F

d) P equivale a: $x \neq 0$ opp. $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ V (è la contronominale)

<u>OSS</u>: La proposiz. enunciata in c è vera in $\mathbb{Z}$ e quindi non può essere equivalente a P.

$\not{P}$: $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ t.c. $xy = 0$ ma

$$\underbrace{x \neq 0 \text{ oppure } y \neq 0}_{\text{nego la tesi di } P.}$$

In b) sto dicendo <u>invece</u>

$\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ tc $xy = 0$ ma $x \neq 0$ e $y \neq 0$

3) Sia $f : A \longrightarrow B$ e $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

grafico di f

Dire quale è vera

a) $\forall b \in B$, $\exists (a,b) \in G$ / In generale è falsa
Vera $\Leftrightarrow f$ surr.

b) $\forall (a,b) \neq (a',b') \in G$ si ha $a \neq a'$ V

c) $\exists (a,b) \neq (a',b') \in G$ t.c $a = a'$ F

d) $\forall (a,b) \neq (a',b') \in G$ si ha $b \neq b'$ F vale se f iniettiva.

f è una legge che <u>ad ogni elemento</u> di A associa un unico elemento di B detto $f(a)$: / $\forall a \in A$ $\exists!$ $(a, f(a)) \in G$.

La c) dice che $\exists (a,b), (a,b') \in G$

$\Rightarrow b = f(a)$, $b' = f(a)$

cioè $b = b'$

4) Sia $f_h : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da $\quad \boxed{h \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$

$$f_h(x) = \begin{cases} hx & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Dire quale è vera

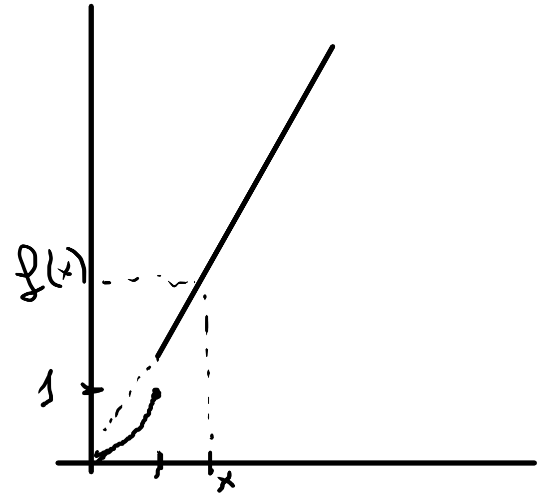
a) f_h non è una funzione F

b) f_h è suriettiva $\forall h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ F

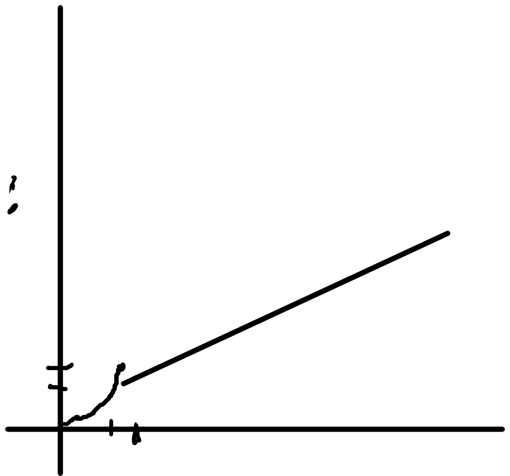
c) $\exists h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.c. f_h è iniettiva V

d) f_h è iniettiva $\Leftrightarrow$ f_h è suriettiva. F

$h > 1$
iniettiva
ma non suri.



$h < 1$:



Per dimostrare algebricamente l'iniettività di f_h con $\underline{h \geq 1}$:

osservo che la funzione $g : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$x \longmapsto hx$$

è iniettiva

i due pezzi di f_h

e che la funzione $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$x \longmapsto x^2$$

è iniettiva.

Devo assicurarmi che se $x > 1$, $x' \leq 1$, $f_h(x) \neq f_h(x')$, Ma $f_h(x) = hx > 1$, $f_h(x') = (x')^2 \leq 1$

quindi sono distinti.

5) Sia $f(n) = hn - h + 1$

Dire per quale dei seguenti valori di h, f determina una funzione iniettiva $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

a) $h = 0$ $\quad f(n) = 1 \ \forall n$
NON è iniettiva

b) $h = 1$ $\quad f(n) = n$ $\quad$ V

c) $h = 2$ $\quad f(0) = -2+1 = -1 \notin \mathbb{N}$
NON è una funzione

d) $h = 1/2$ $\quad f(2) = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
NON è una funzione.

6) Dati A, B insiemi non vuoti, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ coincide con

a) $\mathcal{P}(A \cup B)$

b) $\mathcal{P}(A \cap B)$ V

c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

d) $\emptyset$

7) Sia $f : A \longrightarrow B$ funzione

L'affermazione $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$, $\forall C, D \subseteq A$ è

a) sempre vera   b) vera $\Leftrightarrow$ f iniettiva V

c) vera $\Leftrightarrow$ f suriettiva   d) mai vera

$f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ vero sempre.

perché se $x \in C \cap D \Rightarrow x \in C$ e $x \in D$

quindi $f(x) \in f(C) \cap f(D)$

Viceversa: se $y \in f(C) \cap f(D)$, cioè $\exists c \in C$ tc $f(c) = y$

e $\exists d \in D$ tc $f(d) = y$. Ma non so se $c = d$

cioè non so se $c \in C \cap D$, $d \in C \cap D$. Posso concludere solo se f iniettiva

Se f non è iniettiva

$\exists\ a_1 \neq a_2$ tc $f(a_1) = f(a_2) = y$

$C = \{a_1\}$

$D = \{a_2\}$

$C \cap D = \emptyset \qquad f(\emptyset) = \emptyset$

Ma $f(C) \cap f(D) = \{y\} \neq \emptyset$

8) Le coppie $(x+y, 1)$, $(3, x-y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono uguali quando

a) $x = 3 \quad y = 2$

b) $x = 3 \quad y = 0$

c) mai

d) $x = 2 \quad y = 1$

9) Sia $B^A = \{ f : A \to B \mid f \text{ funzione} \}$.

Se $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, quanti elementi ha B^A?

a) 5 b) 8

c) 6 d) 9

10) Sia $f : A \longrightarrow B$ funzione. Allora $\exists\, g : B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_A$

a) sempre

b) se e soltanto se $A = B$

c) se e soltanto se f è suriettiva

d) se e soltanto se f è iniettiva.