Università degli Studi di Catania

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Appunti di Analisi Reale: Alcuni criteri di compattezza in spazi di funzioni

Studentessa:
Martina Cucuccio

Anno Accademico 2025/2026

Introduzione

In questi appunti viene presentato e discusso uno dei risultati fondamentali dell'analisi matematica, noto come teorema di Ascoli-Arzelà. Tale teorema rappresenta uno strumento centrale nello studio delle successioni di funzioni, in quanto fornisce condizioni sufficienti per garantire l'esistenza di sottosuccessioni convergenti in senso uniforme.

Nella prima parte del seminario vengono introdotte le nozioni preliminari necessarie alla comprensione del teorema, in particolare i concetti di *equilimitatezza* ed *equicontinuità*.

Successivamente viene enunciato il teorema di Ascoli-Arzelà nel contesto di funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato, mettendo in evidenza come tali ipotesi permettano di estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente. La dimostrazione viene poi sviluppata evidenziando i passaggi principali: la costruzione di una sottosuccessione diagonale attraverso l'uso della numerabilità dei razionali e del teorema di Bolzano-Weierstrass, e la verifica della convergenza uniforme mediante il criterio di Cauchy.

Enuncerò anche il teorema di Riesz–Fréchet –Kolmogorov il quale fornisce una caratterizzazione della compattezza negli spazi L^p. In particolare, esso stabilisce condizioni sufficienti affinché una famiglia di funzioni limitata in $L^p(\mathbb{R}^N)$ sia relativamente compatta. L'idea fondamentale del teorema è che una famiglia di funzioni risulta compatta se le traslazioni piccole modificano poco le funzioni stesse in norma L^p. Questo risultato rappresenta una versione negli spazi L^p del teorema di Ascoli–Arzelà ed è uno strumento fondamentale nell'analisi funzionale e nello studio delle successioni di funzioni.
L'obiettivo di questi appunti è mostrare come condizioni apparentemente locali, come l'equicontinuità, unite all'equilimitatezza, consentano di ottenere un risultato di convergenza forte. I teoremi si configurano quindi come uno strumento essenziale in diversi settori dell'analisi matematica, fornendo il punto di partenza per ulteriori sviluppi nello studio degli spazi funzionali e delle loro proprietà di compattezza..

Proprietà

Sia f_k una successione di funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ di $\mathbb{R}$ (più generalmente, è possibile rileggere quanto detto in questo paragrafo nell'ipotesi che $I \subseteq \mathbb{R}$ sia un insieme compatto di $\mathbb{R}$).

Definizione 1. *Diremo che le funzioni f_k sono equilimitate se esiste $M > 0$ tale che*

$$|f_k(x)| \leq M \quad \textit{per ogni } k \in \mathbb{N} \textit{ e per ogni } x \in [a, b].$$

Definizione 2. *Diremo che le funzioni f_k sono equicontinue se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$, allora*

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon \quad \textit{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

In particolare, se le funzioni f_k sono equi-lipschitziane, cioè se esiste $L > 0$ tale che

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in [a, b].$$

allora esse sono anche equicontinue in $[a, b]$.

Teorema di Ascoli-Arzelà

Teorema di Ascoli-Arzelà. *Da ogni successione f_k di funzioni equilimitate ed equicontinue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ di $\mathbb{R}$, se ne può estrarre una convergente uniformemente.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi fondamentali.

Primo passo: Costruzione della sottosuccessione diagonale

Indichiamo con $X = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti razionali dell'intervallo $[a,b]$. Essendo X numerabile, possiamo rappresentarlo mediante la successione x_j, con $j \in \mathbb{N}$.

Per ipotesi, la successione numerica $\{f_k(x_1)\}$ è limitata in $\mathbb{R}$; per il teorema di Bolzano-Weierstrass sappiamo che una tale successione di numeri reali ha sempre una sottosuccessione convergente, e per questo esiste una sottosuccessione $f_k^{(1)}$ di f_k tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ converge verso un numero reale y_1.

Poiché la successione $\{f_k^{(1)}(x_2)\}$ è limitata in $\mathbb{R}$, esiste una sottosuccessione $f_k^{(2)}$ di $f_k^{(1)}$ tale che $f_k^{(2)}(x_2)$ converge verso un numero reale y_2. Continuando la costruzione, per ogni $h = 1, 2, \ldots$ otteniamo una sottosuccessione $f_k^{(h)}$ di f_k tale che $f_k^{(h)}(x_h)$ converge verso un numero reale y_h, e inoltre, per ogni $h \in \mathbb{N}$, $f_k^{(h+1)}$ è una sottosuccessione di $f_k^{(h)}$.

Vale quindi lo schema seguente:

$$\begin{array}{c} f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \ldots, f_k^{(1)}(x_1), \cdots \to y_1 \\ f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \ldots, f_k^{(2)}(x_2), \cdots \to y_2 \\ f_1^{(3)}(x_3), f_2^{(3)}(x_3), f_3^{(3)}(x_3), \ldots, f_k^{(3)}(x_3), \cdots \to y_3 \\ \cdots \\ f_1^{(h)}(x_h), f_2^{(h)}(x_h), f_3^{(h)}(x_h), \ldots, f_k^{(h)}(x_h), \cdots \to y_h \\ \cdots \end{array} \tag{1}$$

Consideriamo la successione diagonale definita da:

$$g_k(x) = f_k^{(k)}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

allora per $k \to +\infty$ si ha:

$$g_k(x_j) \to y_j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Secondo passo: Convergenza uniforme (Criterio di Cauchy)

Fissato $\epsilon > 0$, per l'ipotesi di equicontinuità sappiamo che esiste $\delta > 0$ per cui

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |x-y| < \delta \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

. Suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito s di sottointervalli di ampiezza inferiore a δ. In ognuna di tali parti scegliamo un punto di X, siano essi

$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}$. Risulta così che, per ogni $x \in [a, b]$, esiste x_{j_r} (per qualche $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$) tale che:

$$|x - x_{j_r}| < \delta \tag{4}$$

Per la (3), per ogni $r = 1, 2, \ldots, s$, la successione $g_k(x_{j_r})$ è convergente per $k \to \infty$, e perciò è di Cauchy. Pertanto esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| < \epsilon, \quad \forall k, h > \nu, \quad \forall r = 1, 2, \ldots, s \tag{5}$$

Utilizziamo l'ipotesi di equicontinuità per ogni $x \in [a, b]$ considerando il punto x_{j_r} per cui vale la (4). Dalla (5) segue:

$$|g_k(x) - g_h(x)| \leq |g_k(x) - g_k(x_{j_r})| + |g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| + |g_h(x_{j_r}) - g_h(x)| \tag{6}$$

Dato che:

- $|g_k(x) - g_k(x_{j_r})| < \epsilon$ per equicontinuità;
- $|g_k(x_{j_r}) - g_h(x_{j_r})| < \epsilon$ per la (5);
- $|g_h(x_{j_r}) - g_h(x)| < \epsilon$ per equicontinuità;

si ottiene:

$$|g_k(x) - g_h(x)| < 3\epsilon, \quad \forall k, h > \nu, \quad \forall x \in [a, b] \tag{7}$$

Quindi g_k è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme. Dal criterio di Cauchy uniforme segue l'asserto. $\square$

Mollificatori

Definizione 1

Data una successione $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni definite in $\mathbb{R}^N$, diremo che è una successione di mollificatori se soddisfa le seguenti proprietà per ogni $n \in \mathbb{N}$:

1. $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$;
2. $\operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq B(0, 1/n)$;
3. $$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1;$$
4. $\rho_n \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^N$.

Convoluzione

TEOREMA

Ipotesi: Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$.

Tesi: Per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione

$$y \longmapsto f(x-y)g(y)$$

è integrabile su $\mathbb{R}^n$ e si pone

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Inoltre

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Teorema (M. Riesz–Fréchet–Kolmogorov).
Sia $\mathcal{F}$ un insieme limitato in $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$ cioè
$\sup\{\|f\|_p : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$.
Indichiamo con $\tau_h f$ la traslata di una funzione f, cioè

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h), \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ h \in \mathbb{R}^N$$

Supponiamo che

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \quad \text{uniformemente in } f \in \mathcal{F} \tag{*}$$

cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$, $\forall h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \delta$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Allora $\mathcal{F}|_\Omega$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ per ogni insieme misurabile $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di misura finita.

[Indichiamo con $\mathcal{F}|_\Omega$ le restrizioni a Ω delle funzioni di $\mathcal{F}$.]

Dimostrazione. La dimostrazione consiste di 4 passi.

1° passo. Dimostriamo che

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F} \qquad \forall n > 1/\delta. \tag{8}$$

Per definizione di convoluzione si ha:

$$(\rho_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, f(x-y)\, dy.$$

Si scrive:

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) f(x-y)\, dy - f(x). \tag{9}$$

Per la proprietà del mollificatore si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1,$$

Possiamo scrivere allora:

$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) f(x)\, dy.$$

Quindi sostituendo nella (9):

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)\, dy.$$

Successivamente si prende il valore assoluto:

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|\, \rho_n(y)\, dy$$

$$= \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|\, \rho_n(y)\, dy$$

Applico adesso la diseguaglianza di Hölder:

$$\leq \left(\int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)^p\, dy \right)^{1/p} |B(0,1/n)|^{1/p'}.$$

(tenuto conto che $0 \leq \rho_n \leq 1$ e che $|B(0,1/n)| < 1$)

$$\leq \left(\int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy \right)^{1/p}.$$

Integrando rispetto a x:

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |(\rho_n * f)(x) - f(x)|^p\, dx.$$

usando la stima precedente:

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dx\, dy. \tag{10}$$

Qui abbiamo integrato prima in x e poi in y.

Poiché $\rho_n(y) = 0$ per ogni $y \notin B(0,1/n)$, l'integrale rispetto a y si calcola soltanto sulla sfera $B(0,1/n)$.

Quindi

$$|y| < \frac{1}{n}.$$

Se scegliamo

$$n > \frac{1}{\delta},$$

allora

$$\frac{1}{n} < \delta.$$

Quindi per ogni $y \in B(0,1/n)$,

$$|y| < \delta.$$

Per ipotesi si ha :

$$\|f(x-y) - f(x)\|_p < \varepsilon$$

Cioè

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p.$$

Allora,sostituendo in (10) si ha :

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p^p \leq \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y) \varepsilon^p \, dy.$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1,$$

Si ottiene:

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p^p \leq \varepsilon^p.$$

Quindi:

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Questo conclude il primo passo.

Secondo passo
Si vuole dimostrare che le funzioni $\rho_n * f$ sono:

- uniformemente limitate;
- equicontinue.

La prima stima è:

$$\|\rho_n * f\|_\infty \leq C_n \|f\|_p. \tag{11}$$

Partiamo da

$$|(\rho_n * f)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) f(x-y)\, dy \right|.$$

Portiamo il valore assoluto dentro l'integrale:

$$|(\rho_n * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(y) f(x-y)|\, dy.$$

Separiamo il valore assoluto del prodotto:

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(y)|\, |f(x-y)|\, dy.$$

Poiché $\rho_n(y) \geq 0$, si ha:

$$|\rho_n(y)| = \rho_n(y),$$

Quindi:

$$|(\rho_n * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) |f(x-y)|\, dy.$$

Ora applichiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)|f(x-y)|\,dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Il primo fattore è:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} = \|\rho_n\|_{p'}.$$

Per il secondo fattore, usando l'invarianza per traslazioni della norma L^p, si ha:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\,dy\right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Quindi otteniamo:

$$|(\rho_n * f)(x)| \leq \|\rho_n\|_{p'}\|f\|_p.$$

Poiché questa stima vale per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, passando all'estremo superiore rispetto a x, otteniamo:

$$\|\rho_n * f\|_\infty \leq \|\rho_n\|_{p'}\|f\|_p.$$

Ponendo

$$C_n = \|\rho_n\|_{p'},$$

Si conclude:

$$\|\rho_n * f\|_\infty \leq C_n\|f\|_p.$$

Dimostriamo ora :

$$|(\rho_n * f)(x_1) - (\rho_n * f)(x_2)| \leq C_n\|f\|_p|x_1 - x_2|$$

$$\forall f \in \mathcal{F}, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Si ha:

$$\nabla(\rho_n * f) = (\nabla\rho_n) * f.$$

Quindi

$$\|\nabla(\rho_n * f)\|_\infty = \|(\nabla\rho_n) * f\|_\infty.$$

Per definizione di convoluzione si ha:

$$((\nabla \rho_n) * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \rho_n(y) f(x-y)\, dy.$$

Prendiamo la norma in $\mathbb{R}^N$:

$$|((\nabla \rho_n) * f)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \rho_n(y) f(x-y)\, dy \right|.$$

$$|(\nabla \rho_n) * f)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \rho_n(y)|\, |f(x-y)|\, dy.$$

Applicando Hölder con esponenti coniugati p' e p si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \rho_n(y)|\, |f(x-y)|\, dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \rho_n(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\, dy \right)^{1/p}.$$

Il primo termine è:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \rho_n(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} = \|\nabla \rho_n\|_{p'}.$$

Il secondo termine è:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p\, dy \right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|((\nabla \rho_n) * f)(x)| \le \|\nabla \rho_n\|_{p'} \|f\|_p.$$

Passando al sup rispetto a x, si ottiene

$$\|(\nabla \rho_n) * f\|_\infty \le \|\nabla \rho_n\|_{p'} \|f\|_p.$$

Ponendo

$$C_n = \|\nabla \rho_n\|_{p'},$$

si ha

$$\|\nabla(\rho_n * f)\|_\infty \le C_n \|f\|_p.$$

Ora, per il teorema del valor medio,

$$|(\rho_n * f)(x_1) - (\rho_n * f)(x_2)| \le \|\nabla(\rho_n * f)\|_\infty |x_1 - x_2|.$$

Sostituendo la stima precedente otteniamo:

$$|(\rho_n * f)(x_1) - (\rho_n * f)(x_2)| \le C_n \|f\|_p |x_1 - x_2|.$$

3° passo.

Dato $\varepsilon > 0$ e dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di misura finita, mostriamo che esiste un sottoinsieme limitato e misurabile $\omega \subset \Omega$ tale che

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Poichè

$$f = (f - \rho_n * f) + (\rho_n * f).$$

Prendendo la norma $L^p(\Omega \setminus \omega)$ otteniamo

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \|f - \rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} + \|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}. \tag{12}$$

Da

$$\Omega \setminus \omega \subset \mathbb{R}^N,$$

si ha

$$\|f - \rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \|f - \rho_n * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Quindi sostituendo in (12) si ha:

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \|f - \rho_n * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}.$$

Fissato ora

$$n > \frac{1}{\delta}.$$

Dal primo passo sappiamo che

$$\|f - \rho_n * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Pertanto sostituendo in (12) si ha:

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \varepsilon + \|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}. \tag{13}$$

Stimiamo adesso il secondo termine.

Per definizione della norma L^p,

$$\|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} = \left(\int_{\Omega\setminus\omega} |\rho_n * f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Poiché

$$|\rho_n * f(x)| \le \|\rho_n * f\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

segue che

$$|\rho_n * f(x)|^p \leq \|\rho_n * f\|_\infty^p.$$

Quindi

$$\int_{\Omega\setminus\omega} |\rho_n * f(x)|^p \, dx \leq \int_{\Omega\setminus\omega} \|\rho_n * f\|_\infty^p \, dx.$$

Essendo $\|\rho_n * f\|_\infty^p$ costante rispetto a x,

$$= \|\rho_n * f\|_\infty^p \int_{\Omega\setminus\omega} 1 \, dx.$$

Ma (ricordiamo che Ω ha misura finita)

$$\int_{\Omega\setminus\omega} 1 \, dx = |\Omega \setminus \omega|.$$

Dunque

$$\|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}^p \leq \|\rho_n * f\|_\infty^p |\Omega \setminus \omega|.$$

Prendendo la radice p-esima otteniamo

$$\|\rho_n * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \|\rho_n * f\|_\infty |\Omega \setminus \omega|^{1/p}.$$

Sostituendo adesso tutto in (13) si ha:

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon + |\rho_n * f\|_\infty^p |\Omega \setminus \omega|.$$

Grazie alla (11) è sufficiente scegliere ω in modo che $|\Omega \setminus \omega|$ sia abbastanza piccola.

4° passo.
In questo passo si conclude la dimostrazione della compattezza.
Fissiamo

$$n > \frac{1}{\delta}$$

Dato $\varepsilon > 0,$ scegliamo un insieme limitato $\omega \subset \Omega$ tale che

$$\overline{\omega} \subseteq \Omega$$

e

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in F.$$

Ora consideriamo la famiglia
$\mathrm{K} = (\rho_n * f)|_{\overline{\omega}}$.

Dal secondo passo sappiamo che la famiglia K è uniformemente limitata ed equicontinua.

Per il teorema di Ascoli, K ha chiusura compatta in $C(\overline{\omega})$.

Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza in $L^p(\omega)$, segue che K ha chiusura compatta anche in $L^p(\omega)$.

Questo significa che possiamo ricoprire K con un numero finito di sfere di raggio ε:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(g_i, \varepsilon),$$

con

$$g_i \in L^p(\omega).$$

Consideriamo le funzioni $\overline{g}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ definite da

$$\overline{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare che le sfere

$$B(\overline{g}_i, 3\varepsilon)$$

ricoprono $F|_\Omega$. Infatti, per ogni $f \in \mathcal{F}$, esiste un indice i tale che

$$\|(\rho_n * f) - g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\|f - \overline{g}_i\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega\setminus\omega} |f|^p + \int_\omega |f - g_i|^p$$

Infatti:

- su $\Omega \setminus \omega$, si ha $\overline{g}_i = 0$, quindi
$$f - \overline{g}_i = f;$$
- su ω, si ha $\overline{g}_i = g_i$, quindi
$$f - \overline{g}_i = f - g_i.$$

Usando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\|f - \overline{g}_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} + \|f - g_i\|_{L^p(\omega)}. \tag{14}$$

Il primo termine per il terzo passo è stimato da:

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon.$$

Per il secondo termine usiamo la disuguaglianza triangolare:

$$\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} \leq \|f - \rho_n * f\|_{L^p(\omega)} + \|\rho_n * f - g_i\|_{L^p(\omega)}.$$

Il primo termine, grazie alla stima ottenuta nel primo passo, soddisfa:

$$\|f - \rho_n * f\|_{L^p(\omega)} \leq \|f - \rho_n * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Mentre il secondo termine soddisfa:

$$\|\rho_n * f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

Quindi sostituendo in (14) ottengo:

$$\|f - \overline{g}_i\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $F|_\Omega$ è ricoperta da un numero finito di sfere di raggio 3ε.

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, la famiglia è totalmente limitata.

Essendo $L^p(\Omega)$ uno spazio completo, una famiglia totalmente limitata ha chiusura compatta.

Pertanto:

$$F|_\Omega$$

ha chiusura compatta in

$$L^p(\Omega).$$

$\square$

Corollario
Sia $\mathcal{F}$ un insieme limitato di $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \le p < \infty$. Supponiamo che valga la (*) e inoltre che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ limitato e misurabile, tale che}$$
$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{**}$$

Allora $\mathcal{F}$ ha chiusura compatta in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia Ω un insieme limitato e misurabile tale che valga la (**). Per il teorema M. Riesz–Fr´echet–Kolmogorov sappiamo che $\mathcal{F}_{|\Omega}$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$.

Perciò possiamo ricoprire $\mathcal{F}_{|\Omega}$ con un numero finito di sfere di raggio ε in $L^p(\Omega)$, cioè

$$\mathcal{F}_{|\Omega} \subset \bigcup_i B(g_i, \varepsilon), \qquad g_i \in L^p(\Omega).$$

Posto

$$\overline{g_i}(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

evidentemente $\mathcal{F}$ è ricoperto dalle sfere $B(\overline{g_i}, 2\varepsilon)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Bibliografia

Haim Brezis, *Analisi funzionale, teoria e applicazioni.*