Università degli Studi di Catania

Relazione per il corso di Real Analysis

Il Teorema di Rappresentazione di Riesz

Gaia Luglio

Anno Accademico 2025/2026

Nota: Acconsento alla pubblicazione del presente documento sul sito del DMI UNICT.

Sommario

Il presente elaborato si propone di esaminare in dettaglio la struttura del duale topologico degli spazi L^p, ponendo come fulcro della trattazione il Teorema di Rappresentazione di Riesz per l'esponente $p \in [1, +\infty[$. L'obiettivo primario risiede nella possibilità di fornire una caratterizzazione esplicita dei funzionali lineari continui (entità per natura astratte), riconducendoli a una rappresentazione integrale mediata da elementi dello spazio coniugato L^q. Tale identificazione non solo semplifica l'analisi dei funzionali, ma sancisce un fondamentale isomorfismo isometrico tra $(L^p)^*$ e L^q.

Il percorso metodologico muove dai fondamenti della dualità negli spazi normati, appoggiandosi all'impostazione didattica dei riferimenti del corso [Mar25]. Successivamente, l'analisi si focalizza sullo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, sviluppando rigorosamente la dimostrazione costruttiva per l'intervallo compatto $[a, b]$ e la sua estensione a insiemi misurabili arbitrari, seguendo la classica trattazione di Royden e Fitzpatrick [RF22]. Infine, l'elaborato esplora la generalizzazione del risultato per spazi mensurali σ-finiti e ne discute il significato topologico, avvalendosi dei concetti illustrati da Brezis [Bre86]. A supporto della coerenza formale, il testo è corredato da un'appendice dedicata alle funzioni assolutamente continue.

Indice

1 Fondamenti e Dualità degli Spazi Normati Reali

In questa sezione si introduce lo spazio duale topologico di uno spazio normato reale.

Definizione 1.1. Un **funzionale lineare** su uno spazio normato reale $(X, \|\cdot\|)$ è un'applicazione $T : X \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\, u, v \in X$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot T(u) + \beta \cdot T(v).$$

Un tale funzionale è detto **continuo** se $\exists\, K > 0$ tale che

$$|T(x)| \leq K\|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Si pone

$$\|T\| := \inf\{K > 0 : |T(x)| \leq K\|x\|, \forall x \in X\}$$

e prende il nome di **norma del funzionale** T.

Dall'omogeneità di un funzionale lineare e della norma, si ottiene il seguente lemma.

Lemma 1.2. *Risulta*

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|} \;: x \in X, x \neq 0\right\} = \sup\{|T(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Dimostrazione. Si ponga, per brevità:

$$A := \|T\|, \qquad B := \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}, \qquad C := \sup_{\|x\|=1} |T(x)|.$$

La tesi consiste nel dimostrare la catena di uguaglianze $A = B = C$. La dimostrazione si articola in due passi principali.

Passo 1: Dimostrazione di $B = C$.
Si procede per doppia disuguaglianza.

- **Sottocaso $C \leq B$:** Poiché l'insieme dei vettori di norma unitaria è un sottoinsieme dei vettori non nulli, i.e. $\{x \in X : \|x\| = 1\} \subset \{x \in X : x \neq 0\}$, l'estremo superiore calcolato sul primo insieme è minore o uguale a quello calcolato sul secondo. Ne consegue che $C \leq B$.

- **Sottocaso $B \leq C$:** Per ogni $x \in X$ con $x \neq 0$, sfruttando la linearità di T e l'omogeneità della norma, essendo $\frac{1}{\|x\|} > 0$ si ha:

$$\frac{|T(x)|}{\|x\|} = \left|\frac{1}{\|x\|}T(x)\right| = \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|.$$

  Definendo il vettore $y = \frac{x}{\|x\|}$, si nota che:

$$\|y\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Pertanto, la quantità $\frac{|T(x)|}{\|x\|}$ coincide con il valore assoluto del funzionale applicato a un vettore di norma unitaria ($|T(y)|$), il quale è necessariamente maggiorato dal suo estremo superiore C. Ne segue che $B \le C$.

Passo 2: Dimostrazione di $A = B$
Si procede nuovamente per doppia disuguaglianza.

- **Sottocaso $A \le B$:** Dalla definizione di B come estremo superiore, sussiste la disuguaglianza $\frac{|T(x)|}{\|x\|} \le B$ per ogni $x \neq 0$, ovvero $|T(x)| \le B\|x\|$. Essendo T lineare, tale relazione risulta valida anche per $x = 0$, poiché $|T(0)| = 0 \le B\|0\| = 0$. Dunque, B appartiene all'insieme dei maggioranti $K > 0$ che soddisfano la condizione $|T(x)| \le K\|x\|$ per ogni $x \in X$. Poiché A è l'estremo inferiore di tale insieme, si deduce che $A \le B$.

- **Sottocaso $B \le A$:** Dalla definizione di A, per ogni costante ammissibile $K > 0$ tale che $|T(x)| \le K\|x\|$ per ogni $x \in X$, si ottiene dividendo per la norma che $\frac{|T(x)|}{\|x\|} \le K$ per ogni $x \neq 0$. Poiché l'estremo superiore è il minimo dei maggioranti, si ricava $B \le K$. Essendo ciò vero per ogni K ammissibile, la disuguaglianza si conserva passando all'estremo inferiore, implicando $B \le A$.

Avendo provato che $A = B$ e che $B = C$, l'intera catena di uguaglianze risulta dimostrata. □

La collezione dei funzionali lineari continui su X,

$$X^* := \{T : X \to \mathbb{R},\ T \text{ lineare e continuo}\}$$

si dice **spazio duale topologico di** X. Si può dimostrare che, fissato $T \in X^*$, $\|T\|$ è una norma su X^*.

2 Il Teorema di Rappresentazione di Riesz in $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$

Definita la struttura generale del duale topologico, si restringe l'indagine agli spazi L^p definiti sullo spazio di misura di Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. In questo contesto, l'obiettivo centrale è stabilire un'identificazione precisa tra i funzionali astratti di $(L^p)^*$ e le funzioni appartenenti allo spazio coniugato L^q mediante l'azione dell'integrale.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile. In questa sezione, salvo dove diversamente specificato, si assumerà tacitamente che $p \in [1, +\infty]$ e che q denoti il suo *esponente coniugato* nel senso di Hölder, ovvero tale da soddisfare la relazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Si adotta inoltre la convenzione usuale per cui $q = \infty$ se $p = 1$, e viceversa.

Osservazione 2.1. Dalla (1), si ha:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \frac{p+q}{pq} = 1 \implies p + q = pq \implies pq - p = q \implies p(q-1) = q.$$

Lemma 2.2. *Siano $p \in]1, +\infty[$ e q il suo esponente coniugato. Data $g \in L^q(E)$, si ponga:*

$$h = |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g).$$

Allora valgono le seguenti condizioni:

1) $h \in L^p(E)$*;*

2) $\int_E g \cdot h \, dm = \|h\|_p \|g\|_q = \|h\|_p^p = \|g\|_q^q$.

Dimostrazione. 1) Si calcoli l'integrale di $|h|^p$. Per l'Osservazione 2.1:

$$\int_E |h|^p \, dm = \int_E \left(|g|^{q-1}\right)^p \, dm = \int_E |g|^{(q-1)p} \, dm = \int_E |g|^q \, dm < +\infty,$$

essendo $g \in L^q(E)$ per ipotesi. Dunque $h \in L^p(E)$.

2) Si valuti l'integrale del prodotto $g \cdot h$:

$$\int_E g \cdot h \, dm = \int_E |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g) \cdot g \, dm = \int_E |g|^{q-1} |g| \, dm = \int_E |g|^q \, dm = \|g\|_q^q.$$

Inoltre, per quanto visto nel punto 1), risulta $\|h\|_p^p = \int_E |h|^p \, dm = \int_E |g|^q \, dm = \|g\|_q^q$. Spezzando algebricamente la potenza p-esima della norma di h, e ricordando che $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, si ha:

$$\|h\|_p^p = \|h\|_p \cdot \|h\|_p^{p-1} = \|h\|_p \left[\int_E |h|^p \, dm\right]^{\frac{p-1}{p}} = \|h\|_p \left[\int_E |g|^q \, dm\right]^{\frac{1}{q}} = \|h\|_p \|g\|_q.$$

□

Proposizione 2.3. *Per $p \in [1, +\infty]$ e q il coniugato di p, sia $g \in L^q(E)$ e si definisca il funzionale lineare T_g su $L^p(E)$ dato da*

$$T_g(f) = \int_E f \cdot g \, dm, \quad \forall f \in L^p(E).$$

Allora, valgono le seguenti condizioni:

i) $T_g \in (L^p(E))^*$*;*

ii) $\|T_g\| = \|g\|_q$.

Dimostrazione. La dimostrazione si biforca naturalmente in base all'esponente considerato.

Caso $p \in]1, +\infty[$

Punto i) Essendo $g \in L^q(E)$ e $f \in L^p(E)$, e poiché p, q sono esponenti coniugati, dalla **disuguaglianza di Hölder** risulta che $f \cdot g \in L^1(E)$ e si ha:

$$\int_E |f \cdot g| \, dm \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Dunque $T_g(f)$ è ben definita $\forall f \in L^p(E)$. T_g è altresì lineare essendo tale l'integrale. Rimane da provare che T_g sia continuo (si veda la Definizione 1.1). Si ha:

$$|T_g(f)| = \left| \int_E f \cdot g \, dm \right| \leq \int_E |f \cdot g| \, dm \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall f \in L^p(E). \tag{2}$$

Posto $K = \|g\|_q$, si ha la tesi.

Punto ii) ($\leq$) Dal Lemma 1.2, si ha $\|T_g\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|T_g(f)|}{\|f\|_p}$. Poiché $|T_g(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (dalla (2)), si ricava che $\sup_{f \neq 0} \frac{|T_g(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q$. Ne segue:

$$\|T_g\| \leq \|g\|_q.$$

($\geq$) Sia $h = |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g)$. Per il Lemma 2.2, si ha $T_g(h) = \int_E g \cdot h \, dm = \|h\|_p \|g\|_q \geq 0$. Essendo $|T_g(h)| = \|h\|_p \|g\|_q$, si ottiene:

$$\|T_g\| \geq \frac{|T_g(h)|}{\|h\|_p} = \|g\|_q.$$

Caso limite per $p = 1$

Sia $p = 1$, da cui $q = \infty$. Poiché la costruzione del Lemma 2.2 non risulta applicabile per via analitica, si procede per assurdo conformemente alla letteratura [RF22].

Si supponga, per assurdo, che $\|T_g\| < \|g\|_\infty$. Fissato un $\epsilon > 0$ tale per cui risulti $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty - \epsilon$, si consideri il seguente insieme misurabile:

$$A = \left\{ x \in E : |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Si proceda a valutare la misura di tale insieme. Se, per assurdo, risultasse $m(A) = 0$, la disuguaglianza stretta $|g(x)| < \|g\|_\infty - \epsilon/2$ sarebbe verificata per quasi ogni $x \in E$. Ciò implicherebbe che la costante $\|g\|_\infty - \epsilon/2$ costituisce un maggiorante essenziale per la funzione $|g|$, contraddicendo la minimalità intrinseca della norma $\|g\|_\infty$, definita rigorosamente come il minimo dei maggioranti essenziali. Ne consegue inequivocabilmente che $m(A) > 0$.

Essendo la misura di Lebesgue σ-finita, è noto dalla teoria della misura che ogni insieme misurabile di misura strettamente positiva (sia essa finita o infinita) contiene necessariamente almeno un sottoinsieme di misura finita e non nulla (ottenibile, ad esempio, intersecando l'insieme stesso con una successione esaustiva di insiemi di misura finita). È pertanto pienamente legittimo estrarre un sottoinsieme misurabile $B \subseteq A$ tale che $0 < m(B) < +\infty$.

Si definisca pertanto la funzione semplice:

$$f = \operatorname{sgn}(g) \chi_B,$$

la quale appartiene a $L^1(E)$ con norma $\|f\|_1 = \int_E \chi_B \, dm = m(B)$. Valutando il funzionale T_g nell'elemento f, e osservando che sull'insieme B sussiste la minorazione puntuale $|g(x)| \geq \|g\|_\infty - \epsilon/2$, si ottiene per monotonia dell'integrale:

$$T_g(f) = \int_B \operatorname{sgn}(g) \cdot g \, dm = \int_B |g| \, dm \geq \int_B \left(\|g\|_\infty - \frac{\epsilon}{2} \right) dm = \left(\|g\|_\infty - \frac{\epsilon}{2} \right) \|f\|_1,$$

essendo $m(B) = \|f\|_1$. D'altra parte, il Lemma 1.2 garantisce la validità della disuguaglianza fondamentale $|T_g(f)| \leq \|T_g\|\|f\|_1$. Poiché, nel caso in esame, la valutazione di $T_g(f)$ si riduce all'integrale di un modulo, tale quantità risulta non negativa, rendendo lecito omettere il valore assoluto. Combinando questa intrinseca proprietà di limitatezza con l'ipotesi d'assurdo iniziale, sussiste la seguente catena di maggiorazioni:

$$T_g(f) \leq \|T_g\|\|f\|_1 \leq (\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1.$$

Confrontando le due stime ottenute per $T_g(f)$ e semplificando il termine $\|f\|_1 > 0$, si perviene alla disuguaglianza:

$$\|g\|_\infty - \frac{\epsilon}{2} \leq \|g\|_\infty - \epsilon \implies \frac{\epsilon}{2} \leq 0.$$

Tale condizione contraddice la stretta positività di ϵ. L'assunto iniziale è pertanto falso, il che conclude la dimostrazione provando che $\|T_g\| = \|g\|_\infty$. □

Corollario 2.4. *Sia $p \in [1, +\infty[$. Se $f \in L^p(E)$ con $f \neq 0$, allora esiste un funzionale lineare continuo $T \in (L^p(E))^*$ tale che:*

$$T(f) = \|f\|_p \quad e \quad \|T\| = 1.$$

Dimostrazione. Sia $q \in]1, +\infty]$ l'esponente coniugato di p. Poiché per ipotesi $f \neq 0$, la sua norma $\|f\|_p$ è strettamente positiva. Si proceda costruendo esplicitamente una funzione $g \in L^q(E)$ idonea a generare il funzionale richiesto. Si distinguono due casi:

- **Caso limite per $p = 1$ ($q = \infty$):** si definisca $g = \text{sgn}(f)$. Essendo $f \neq 0$, si ha banalmente $\|g\|_\infty = 1$. L'integrale del prodotto restituisce $\int_E f \cdot g \, dm = \int_E |f| \, dm = \|f\|_1$.

- **Caso $p \in]1, +\infty[$:** si definisca la funzione:

  $$g = \text{sgn}(f)\frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

  Sfruttando l'identità $p = q(p-1)$ ricavata nell'Osservazione 2.1, si valuti la norma di tale funzione in $L^q(E)$:

  $$\|g\|_q^q = \int_E \frac{|f|^{(p-1)q}}{\|f\|_p^{(p-1)q}} \, dm = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f|^p \, dm = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1,$$

  da cui $\|g\|_q = 1$. Valutando l'integrale del prodotto si ha:

  $$\int_E f \cdot g \, dm = \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}} \, dm = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p.$$

In entrambi i casi, è stata esibita una funzione $g \in L^q(E)$ tale che $\|g\|_q = 1$ e $\int_E f \cdot g \, dm = \|f\|_p$. In virtù della Proposizione 2.3, tale funzione induce un funzionale lineare continuo $T_g \in (L^p(E))^*$ definito da:

$$T_g(u) = \int_E u \cdot g \, dm, \quad \forall u \in L^p(E).$$

Applicando tale funzionale alla funzione originaria f, si ottiene $T_g(f) = \int_E f \cdot g \ dm = \|f\|_p$. Infine, sempre per la Proposizione 2.3, la norma del funzionale coincide con la norma in $L^q(E)$ della funzione inducente, da cui $\|T_g\| = \|g\|_q = 1$. Ponendo dunque $T = T_g$, si ottiene il funzionale cercato, concludendo la dimostrazione. □

Osservazione 2.5. Il risultato espresso nel corollario precedente, pur essendo stato dimostrato costruttivamente sfruttando la specifica struttura degli spazi L^p e l'operatore integrale, è in realtà un caso particolare di un risultato astratto: il teorema di Hahn-Banach. Tale teorema assicura che in ogni spazio normato reale X, per ogni vettore non nullo x, esiste sempre un funzionale nel duale topologico di norma unitaria capace di mappare il vettore nella sua norma. Sulla base di questo fondamentale principio di prolungamento dei funzionali, la tesi del Corollario sussiste invariata anche per lo spazio $L^\infty(E)$, sebbene in tale contesto non sia in generale possibile fornire una rappresentazione integrale esplicita del funzionale.

Si richiamino le seguenti nozioni.

Definizione 2.6. Una funzione $\varphi : E \to \mathbb{R}$ è detta **semplice** se essa è misurabile e la sua immagine $\varphi(E)$ ha cardinalità finita.

Definizione 2.7. Una funzione misurabile $f : E \to \mathbb{R}$ si dice a **supporto finito** se l'insieme

$$\text{supp}(f) = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$$

ha misura finita.

Teorema 2.8 (Teorema di Approssimazione Semplice)**.** *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile, allora esiste una successione $\{\varphi_n : E \to \mathbb{R}\}$ di funzioni semplici e a supporto finito che converge puntualmente a f su E e gode della seguente proprietà:*

$$|\varphi_n| \leq |f| \quad \textit{in } E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, se $f \geq 0$, la successione $\{\varphi_n\}$ è monotona non decrescente e ciascuna $\varphi_n \geq 0$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione, si rimanda a [RF22, pag. 57]. □

Definizione 2.9. Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di uno spazio normato reale X si dice **denso** in X se:

$$\forall f \in X \quad \text{e} \quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, g \in \mathcal{F} \quad \text{t.c.} \quad \|f - g\| < \epsilon.$$

Teorema 2.10. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile e $p \in [1, +\infty[$.*
Valgono le seguenti condizioni:

i) Il sottospazio delle funzioni semplici e a supporto finito è denso in $L^p(E)$;

ii) Il sottospazio delle funzioni continue è denso in $L^p(E)$;

iii) Il sottospazio delle funzioni costanti a tratti è denso in $L^p([a,b])$, $\forall\ [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione. Per la dimostrazione, si rimanda a [RF22, pag. 134]. □

Vale il seguente utile criterio per l'appartenenza di una funzione nello spazio $L^q(E)$ per $q \in]1, +\infty]$.

Lemma 2.11. *Siano $p \in [1, +\infty[$ e $g \in L^1(E)$. Si assuma che $\exists\, K \geq 0$ tale che*

$$\left| \int_E \varphi \cdot g \, dm \right| \leq K \cdot \|\varphi\|_p, \quad \textit{per ogni funzione semplice e a supporto finito } \varphi.$$

Allora $g \in L^q(E)$, dove q è il coniugato di p. Inoltre $\|g\|_q \leq K$.

Dimostrazione. Si osservi preliminarmente che, se φ è una funzione semplice e a supporto finito, tale risulta essere anche il prodotto $\operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi$. Infatti:

- Essendo φ semplice, assume un numero finito di valori, siano questi $c_1, \ldots, c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Poiché la funzione $\operatorname{sgn}(g)$ assume al più i valori $\{-1, 0, 1\}$, il loro prodotto assumerà a sua volta un numero finito di valori: c_i, $-c_i$ e 0.
  D'altra parte, il prodotto di funzioni misurabili è misurabile, dunque la funzione $\operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi$ è semplice;

- Per la legge di annullamento del prodotto in $\mathbb{R}$, il prodotto è non nullo solo se entrambi i fattori sono non nulli. Ne consegue l'inclusione insiemistica

  $$\operatorname{supp}(\operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\operatorname{sgn}(g)) \cap \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi).$$

  Poiché φ è a supporto finito e dunque $m(\operatorname{supp}(\varphi)) < +\infty$, per monotonia della misura di Lebesgue si ha

  $$m(\operatorname{supp}(\operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi)) \leq m(\operatorname{supp}(\varphi)) < +\infty,$$

  garantendo che anche il supporto della funzione prodotto sia di misura finita.

Inoltre, sussistono le identità:

$$|g| \cdot \varphi = g \cdot \operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi \quad \text{e} \quad \|\operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi\|_p = \|\varphi\|_p.$$

Di conseguenza, l'ipotesi del lemma continua a valere se si sostituisce g con $|g|$. È pertanto lecito assumere, senza ledere di generalità, che sia $g \geq 0$.

Caso 1: $p = 1$ (e dunque $q = \infty$)
Sotto l'assunzione $g \geq 0$, si deve dimostrare che $g \in L^\infty(E)$ e che K costituisce un maggiorante essenziale per g. Si proceda per assurdo supponendo il contrario: esisterà allora un $\epsilon > 0$ t.c. l'insieme

$$E_\epsilon = \{x \in E : g(x) > K + \epsilon\}$$

ha misura non nulla. Si definisca $\varphi = \chi_A$, dove $A \subseteq E_\epsilon$ è un sottoinsieme misurabile avente misura finita e strettamente positiva (la cui esistenza è garantita essendo $g \in L^1(E)$ e la misura di Lebesgue σ-finita). La funzione φ è semplice, a supporto finito (essa assume il valore 1 nell'insieme A) e ha norma $\|\varphi\|_1 = \int_E |\chi_A|\, dm = \int_E \chi_A\, dm = 1 \cdot m(A) + 0 \cdot m(E \setminus A) = m(A)$. Valutando l'integrale si ottiene:

$$\int_E \varphi \cdot g\, dm = \int_A g\, dm \geq (K+\epsilon)m(A) = (K+\epsilon)\|\varphi\|_1.$$

Tuttavia, ciò contraddice l'ipotesi del Lemma, la quale imporrebbe $\int_E \varphi \cdot g\ dm \leq K\|\varphi\|_1$. L'assurdo generato dimostra che $\|g\|_\infty \leq K$.

Caso 2: $p \in]1, +\infty[$ **(e dunque** $q \in]1, +\infty[$**)**
Essendo g non negativa e misurabile, per il Teorema 2.8 esiste una successione monotona non decrescente $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici, non negative e a supporto finito, che converge puntualmente a g su E. Si osservi che, poiché $1 < q < \infty$, la successione di potenze $\{\varphi_k^q\}$ risulta altresì monotona non decrescente, costituita da funzioni misurabili non negative e convergente puntualmente a g^q. Per il Teorema della Convergenza Monotona, al fine di verificare che $g \in L^q(E)$ e $\|g\|_q \leq K$, è sufficiente dimostrare che per ogni indice k si abbia:

$$\int_E \varphi_k^q\, dm \leq K^q. \tag{3}$$

Infatti, qualora la disuguaglianza (3) risultasse verificata per ogni indice k, passando al limite per $k \to \infty$ e applicando il Teorema di Convergenza Monotona, si otterrebbe:

$$\int_E g^q\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k^q\, dm \leq K^q.$$

Da quest'unica relazione discendono immediatamente entrambe le tesi del Lemma: la finitezza dell'integrale a primo membro garantisce, per definizione, che $g \in L^q(E)$; inoltre, estraendo la radice q-esima di ambo i membri, si deduce esattamente che $\|g\|_q \leq K$.
Fissato un arbitrario $k \in \mathbb{N}$, si osservi la seguente maggiorazione puntuale:

$$\varphi_k^q = \varphi_k \cdot \varphi_k^{q-1} \leq g \cdot \varphi_k^{q-1},$$

essendo $|\varphi_n| \leq |g| = g$ $(g \geq 0)$ per il Teorema 2.8. Poiché la funzione φ_k^{q-1} è semplice e a supporto finito, essa è ammissibile per l'ipotesi del Lemma. Integrando su E la disuguaglianza precedente e sfruttando l'Osservazione 1, si ottiene:

$$\int_E \varphi_k^q\, dm \leq \int_E g \cdot \varphi_k^{q-1}\, dm \leq K\|\varphi_k^{q-1}\|_p = K\left[\int_E (\varphi_k^{q-1})^p\, dm\right]^{\frac{1}{p}} = K\left[\int_E \varphi_k^q\, dm\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Poiché per gli esponenti coniugati vale la relazione $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, dividendo ambo i membri della disuguaglianza per la quantità $\left[\int_E \varphi_k^q\, dm\right]^{\frac{1}{p}}$ (assumendola non nulla, caso in cui la tesi sarebbe altrimenti banale), si ricava esattamente la limitazione cercata:

$$\left[\int_E \varphi_k^q\, dm\right]^{\frac{1}{q}} \leq K \implies \int_E \varphi_k^q\, dm \leq K^q.$$

Passando al limite per $k \to \infty$, il Teorema di Convergenza Monotona garantisce infine che

$\|g\|_q \leq K$, concludendo la dimostrazione. □

Definizione 2.12. Sia $p \in [1, +\infty]$ e q il coniugato di p. Un funzionale $T \in (L^p(E))^*$ si dice **rappresentato** dalla funzione $g \in L^q(E)$, e si scrive $\mathcal{R}(T) = g$, se

$$T(f) = \int_E g \cdot f \, dm, \quad \forall f \in L^p(E).$$

Osservazione 2.13 (Interpretazione Topologica e Identificazione)*.* Alla luce dei risultati finora esposti, è possibile inquadrare la ricerca di una rappresentazione integrale in un contesto strutturale più ampio. La Proposizione 2.3 garantisce che l'applicazione lineare $\tau : L^q(E) \to (L^p(E))^*$ definita dalla legge di assegnazione $\tau(g) = T_g$ preserva la norma, ovvero $\|\tau(g)\| = \|T_g\| = \|g\|_q$. L'operatore τ costituisce pertanto un'isometria lineare iniettiva tra i due spazi.

L'obiettivo fondante del Teorema di Rappresentazione di Riesz è stabilire la *suriettività* di tale isometria. Dimostrare che ogni funzionale ammette una rappresentazione $\mathcal{R}(T) = g$ equivale a provare che τ è un operatore suriettivo e che l'operatore $\mathcal{R}$ coincide esattamente con il suo inverso τ^{-1}. Come sottolineato in letteratura (si veda Brezis [Bre86, Cap. 4]), questo risultato asserisce che ogni funzionale lineare continuo - entità per sua natura "astratta" - può essere rappresentato "concretamente" come un integrale.

Sancendo di fatto l'esistenza di un isomorfismo isometrico globale, il teorema permette di operare una *sistematica identificazione* tra lo spazio duale astratto e lo spazio coniugato, denotata comunemente con l'isomorfismo $(L^p(E))^* \cong L^q(E)$, o perfino con l'uguaglianza formale $(L^p(E))^* = L^q(E)$. Questa identificazione risulta di capitale importanza nell'Analisi Funzionale, poiché consente di trattare gli elementi del duale alla stregua di vere e proprie funzioni di L^q, assoggettabili alle consuete operazioni dell'Analisi Reale.

La dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz viene qui presentata e analizzata nel dettaglio per lo spazio $L^p([a, b])$, ovvero considerando come dominio di integrazione un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Tale caso costituisce il nucleo concettuale e tecnico del teorema, a partire dal quale la teoria della misura permette le successive estensioni a domini arbitrari.

Teorema 2.14 (Teorema di Rappresentazione di Riesz per il Duale di $L^p([a, b])$)**.** *Siano $p \in [1, +\infty[$ e q il suo esponente coniugato. Sia inoltre $T \in L^p([a, b])^*$ un funzionale lineare continuo. Allora esiste una funzione $g \in L^q([a, b])$ t.c. T sia rappresentato da g, ovvero:*

$$T(f) = \int_a^b g \cdot f \, dm, \quad \forall f \in L^p([a, b]).$$

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in due parti, trattando inizialmente il caso $p > 1$ per poi analizzare il caso limite $p = 1$ al termine della medesima.

Caso $p \in]1, +\infty[$

Passo 1: Costruzione della funzione accumulatrice η.

L'obiettivo è individuare una funzione g che rappresenti il funzionale T. A tale scopo, si definisca una funzione $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a, \\ T(\chi_{[a,x]}) & \text{se } x \in]a,b]. \end{cases}$$

Si dimostra che $\eta \in AC([a,b])$. In primo luogo, si fissi un arbitrario sottointervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$. Si osservi preliminarmente che l'intervallo $[a,d]$ può essere espresso come unione disgiunta $[a,c[\sqcup [c,d]$, da cui discende l'identità puntuale q.o. per le relative funzioni caratteristiche:

$$\chi_{[a,d]} = \chi_{[a,c[} + \chi_{[c,d]}.$$

Inoltre, si noti che le funzioni $\chi_{[a,c[}$ e $\chi_{[a,c]}$ differiscono esclusivamente sul singoletto $\{c\}$. Essendo quest'ultimo un insieme di misura nulla per la misura di Lebesgue, le due funzioni coincidono quasi ovunque, rappresentando pertanto il medesimo elemento nello spazio $L^p([a,b])$. Di conseguenza, l'azione del funzionale su di esse è identica: $T(\chi_{[a,c[}) = T(\chi_{[a,c]}) = \eta(c)$. Sfruttando tali considerazioni e la linearità di T, è possibile esprimere l'incremento di η sull'intervallo $[c,d]$ come segue:

$$\eta(d) - \eta(c) = T(\chi_{[a,d]}) - T(\chi_{[a,c[}) = T(\chi_{[a,d]} - \chi_{[a,c[}) = T(\chi_{[c,d]}). \tag{4}$$

Passo 2: Verifica dell'assoluta continuità di η.

Fissato $\epsilon > 0$, sia $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ una generica famiglia finita di sottointervalli di $[a,b]$, privi di punti interni in comune (ovvero $]a_i,b_i[\cap]a_j,b_j[= \emptyset$ per $i \neq j$). Si definisca per ciascun indice k il coefficiente di segno $\epsilon_k = \operatorname{sgn}(\eta(b_k) - \eta(a_k))$, in modo che $|\eta(b_k) - \eta(a_k)| = \epsilon_k \cdot [\eta(b_k) - \eta(a_k)]$. Sfruttando l'identità (4) e la linearità del funzionale T, si ha:

$$\sum_{k=1}^n |\eta(b_k) - \eta(a_k)| = \sum_{k=1}^n \epsilon_k[\eta(b_k) - \eta(a_k)] = \sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot T(\chi_{[a_k,b_k]}) = T\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot \chi_{[a_k,b_k]}\right). \tag{5}$$

Si ponga $f = \sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot \chi_{[a_k,b_k]}$. Essendo una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili (intervalli), essa è misurabile. Inoltre assume un numero finito di valori ($\{-1,0,1\}$) ed è pertanto una funzione semplice (più specificamente, costante a tratti). Poiché gli intervalli di base sono a due a due disgiunti, i supporti delle funzioni caratteristiche non si sovrappongono. Di conseguenza, elevando al modulo p-esimo, si ha $|f|^p = \sum_{k=1}^n |\epsilon_k|^p \chi_{[a_k,b_k]}$. Essendo $|\epsilon_k| \leq 1$ per costruzione, si ottiene la maggiorazione puntuale $|f|^p \leq \sum_{k=1}^n \chi_{[a_k,b_k]}$. Integrando su $[a,b]$, risulta immediato calcolarne una stima per la norma in L^p:

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f|^p \, dm\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} 1 \, dm\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dalla Definizione 1.1 relativa ai funzionali continui, sussiste la limitazione $|T(f)| \leq \|T\| \|f\|_p$.

Sostituendo tale stima nella (5), si ricava la disuguaglianza chiave:

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta(b_k) - \eta(a_k)| = |T(f)| \leq \|T\| \|f\|_p \leq \|T\| \left[\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Scegliendo $\delta = (\epsilon/\|T\|)^p$ (si assume T non nullo, e dunque $\|T\| \neq 0$, altrimenti si avrebbe banalmente $\eta \equiv 0$), purché $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, si ottiene immediatamente $\sum_{k=1}^{n} |\eta(b_k) - \eta(a_k)| < \epsilon$. Ciò verifica il criterio formale di assoluta continuità di η su $[a, b]$.

Passo 3: Derivazione e rappresentazione sugli intervalli.
Avendo provato che $\eta \in AC([a, b])$, è lecito applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo per l'integrale di Lebesgue (si veda il Teorema A.3 nell'Appendice A). Esso assicura che η sia derivabile quasi ovunque su $[a, b]$ e che la sua derivata - che si denoterà con $g \equiv \eta'$ - sia una funzione integrabile, ovvero $g \in L^1([a, b])$. Tale teorema garantisce inoltre che l'incremento della funzione coincida con l'integrale della sua derivata. Coniugando questo risultato analitico con l'identità (4), si ottiene che, per ogni sottointervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$:

$$T(\chi_{[c,d]}) = \eta(d) - \eta(c) = \int_c^d g \, dm = \int_a^b g \cdot \chi_{[c,d]} \, dm. \tag{6}$$

Passo 4: Estensione per densità a tutto $L^p([a, b])$.
La validità della (6) si estende per linearità a qualsiasi funzione costante a tratti, essendo quest'ultima una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli. Dunque, per ogni funzione costante a tratti h, risulta $T(h) = \int_a^b g \cdot h \, dm$.

In virtù del Teorema 2.10, il sottospazio delle funzioni costanti a tratti è denso in $L^p([a, b])$. In particolare, scegliendo come f della Definizione 2.9 una funzione $\varphi \in L^p([a, b])$ semplice, si può costruire la seguente successione di funzioni costanti a tratti:

- Per $n = 1$, si scelga $\epsilon = 1$. Per la Definizione 2.9, $\exists\, h_1$ *funzione costante a tratti t.c.* $\|\varphi - h_1\|_p < 1$;

- Per $n = 2$, si scelga $\epsilon = \frac{1}{2}$. Per la Definizione 2.9, $\exists\, h_2$ *funzione costante a tratti t.c.* $\|\varphi - h_2\|_p < \frac{1}{2}$;

  ...

- Per $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, si scelga $\epsilon = \frac{1}{n}$. Per la Definizione 2.9, $\exists\, h_n$ *funzione costante a tratti t.c.* $\|\varphi - h_n\|_p < \frac{1}{n}$.

Si è costruita così la successione

$$\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{7}$$

di funzioni costanti a tratti e convergente a φ in $L^p([a, b])$. Infatti:

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi - h_n\|_p \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Essendo il funzionale T continuo, l'operazione di limite commuta, garantendo che $\lim_{n \to \infty} T(h_n) = T(\varphi)$. Per quanto riguarda la rappresentazione integrale, poiché le funzioni costanti a tratti h_n

approssimano la funzione semplice φ in norma $L^p([a,b])$, dalla teoria dell'approssimazione è noto che esse possono essere scelte uniformemente limitate. Sfruttando tale limitatezza e la fondamentale integrabilità di g (essendo $g \in L^1([a,b])$), è garantito il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Eguagliando i due risultati si ottiene:

$$T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T(h_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g \cdot h_n \, dm = \int_a^b g \cdot \varphi \, dm. \tag{8}$$

Risulta quindi dimostrato che la rappresentazione integrale è valida per ogni funzione semplice φ. Passando ai valori assoluti e sfruttando la limitatezza intrinseca dei funzionali continui (si veda la Definizione 1.1), si ricava:

$$\left| \int_a^b g \cdot \varphi \, dm \right| = |T(\varphi)| \leq \|T\| \|\varphi\|_p.$$

Tale disuguaglianza soddisfa perfettamente le ipotesi del Lemma 2.11, dove il ruolo della costante K è ricoperto dalla norma del funzionale $\|T\|$. L'applicazione del lemma permette di dedurre un fatto cruciale: la funzione g acquisisce ulteriore regolarità, implicando che $g \in L^q([a,b])$ (e che $\|g\|_q \leq \|T\|$).

Ottenuta l'appartenenza a $L^q([a,b])$, è ora possibile estendere il risultato in via definitiva a tutto lo spazio $L^p([a,b])$. Poiché il Teorema 2.10 assicura che anche il sottospazio delle funzioni semplici è denso in $L^p([a,b])$, fissata una qualsiasi $f \in L^p([a,b])$, si scelga una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$ convergente a f in norma, tale per cui $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_p = 0$ (analogamente a come si è costruita la successione (7)). Sempre per la continuità di T, risulta immediato che

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(f). \tag{9}$$

Resta da giustificare rigorosamente il passaggio al limite per l'integrale. Valutando il modulo della differenza tra gli integrali e applicando la disuguaglianza di Hölder (ora lecita in quanto si è provato che $g \in L^q([a,b])$), sussiste la seguente catena di maggiorazioni:

$$\left| \int_a^b g \cdot \varphi_n \, dm - \int_a^b g \cdot f \, dm \right| \leq \int_a^b |g| \cdot |\varphi_n - f| \, dm \leq \|g\|_q \cdot \|\varphi_n - f\|_p.$$

Poiché $\|g\|_q$ è una quantità finita e $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$ per $n \to \infty$, il limite del prodotto è banalmente zero. Ciò dimostra che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g \cdot \varphi_n \, dm = \int_a^b g \cdot f \, dm. \tag{10}$$

Infine, poiché le funzioni della successione φ_n sono semplici, in virtù dell'equazione (8) è noto che per ogni indice n sussiste l'identità

$$T(\varphi_n) = \int_a^b g \cdot \varphi_n \, dm. \tag{11}$$

Pertanto, combinando le uguaglianze (9), (10) e (11), risulta:

$$T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(\varphi_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g \cdot \varphi_n \, dm = \int_a^b g \cdot f \, dm. \tag{12}$$

La dimostrazione del teorema per il caso $p \in]1, +\infty[$ è così completata.

Caso $p = 1$

Si mantenga la medesima definizione della funzione accumulatrice $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$ introdotta nel caso precedente. Anziché verificarne l'assoluta continuità mediante la definizione formale, si intende dimostrare una condizione più forte, ovvero che η è Lipschitziana.

Fissati arbitrariamente due punti $c, d \in [a, b]$ con $c < d$, si valuti il modulo dell'incremento di η. Sfruttando l'identità (4) (la cui validità prescinde da p) e la definizione di norma del funzionale continuo T, si ottiene:

$$|\eta(d) - \eta(c)| = |T(\chi_{[c,d]})| \leq \|T\| \|\chi_{[c,d]}\|_1.$$

Nel caso $p = 1$, la norma della funzione caratteristica coincide banalmente con la misura di Lebesgue dell'intervallo:

$$\|\chi_{[c,d]}\|_1 = \int_a^b \chi_{[c,d]} \, dm = \int_c^d 1 \, dm = d - c.$$

Sostituendo tale valore, si ricava la disuguaglianza:

$$|\eta(d) - \eta(c)| \leq \|T\|(d - c).$$

Ciò dimostra che la funzione η è Lipschitziana su $[a, b]$, con costante di Lipschitz pari a $\|T\|$.

In virtù della Proposizione A.2, l'essere Lipschitziana garantisce che η sia assolutamente continua sull'intervallo. Essendo $\eta \in AC([a, b])$, l'esistenza della derivata $g \equiv \eta'$ e la rappresentazione sugli intervalli seguono identicamente al Passo 3 del caso precedente. Inoltre, dalla disuguaglianza di Lipschitz appena ricavata discende che, quasi ovunque, $|g| = |\eta'| \leq \|T\|$, il che assicura l'appartenenza $g \in L^\infty([a, b])$.

Dotati di tale regolarità per la funzione g, è sufficiente procedere in maniera del tutto analoga al Passo 4 del caso $p > 1$. Sfruttando gli argomenti di densità e il passaggio al limite sotto il segno di integrale tramite la disuguaglianza di Hölder (declinata per gli esponenti coniugati $p = 1$ e $q = \infty$), la validità della rappresentazione si estende a ogni funzione, concludendo che:

$$T(f) = \int_a^b g \cdot f \, dm, \quad \forall f \in L^1([a, b]).$$

Ciò esaurisce il caso $p = 1$ e completa globalmente la dimostrazione del Teorema. $\square$

Teorema 2.15 (Teorema di Rappresentazione di Riesz per il Duale di $L^p(E)$)**.** *Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile, per $p \in [1, +\infty[$ e q il coniugato di p, allora ogni funzionale $T \in (L^p(E))^*$ è rappresentato da una funzione $g \in L^q(E)$.*

Cenno della dimostrazione. Sebbene la dimostrazione formale completa esuli dagli scopi della presente trattazione (si veda [RF22, pag. 146]), l'idea fondante consiste nel ricondursi al caso degli intervalli. Per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$, si definisce un nuovo funzionale $\tilde{T}(f) = T(f|_E)$. Sfruttando il teorema appena dimostrato su intervalli arbitrariamente grandi $[-n, n]$ e passando al limite, si ottiene una funzione $g \in L^q(\mathbb{R})$ che rappresenta $\tilde{T}$. La restrizione di tale g all'insieme E fornisce l'elemento cercato. La biiettività discende poi banalmente dalla linearità e dalla conservazione della norma. $\square$

Corollario 2.16. *Per $p \in [1, +\infty[$ e q il coniugato di p, l'operatore di rappresentazione di Riesz*

$$\mathcal{R} : (L^p(E))^* \to L^q(E)$$

è biiettivo, e inoltre, soddisfa la condizione $\|\mathcal{R}(T)\|_q = \|T\|, \quad \forall\, T \in (L^p(E))^*$.

Dimostrazione. Dal Teorema di Rappresentazione di Riesz 2.15, segue che l'operatore lineare $\mathcal{R}$ è ben definito e, dalla Proposizione 2.3, risulta essere suriettivo e preserva le norme. Essendo lineare e preservando le norme, $\mathcal{R}$ è anche iniettivo, dunque biiettivo. $\square$

Osservazione 2.17. Nel precedente teorema di rappresentazione, una restrizione necessaria è $p \neq \infty$. Per la rappresentazione di tutti i funzionali lineari continui su $L^\infty(E)$, è necessario il Teorema di Rappresentazione di Kantorovitch.

3 Il Teorema di Rappresentazione di Riesz in $(S, \mathcal{F}, \mu)$

Nella Sezione precedente si è dimostrato il Teorema di Rappresentazione di Riesz nel contesto specifico dell'integrale di Lebesgue su $\mathbb{R}$. In questa sezione si estende tale risultato al duale dello spazio $L^p(S, \mu)$ per $p \in [1, +\infty[$, dove la terna $(S, \mathcal{F}, \mu)$ rappresenta un generico spazio misurabile σ-finito.

Questa formulazione generalizza in modo diretto l'isometria stabilita per le funzioni di variabile reale, svincolando il teorema dalle proprietà topologiche di $\mathbb{R}$ e fondandolo puramente sulla struttura della misura astratta.

Teorema 3.1 (Teorema di Rappresentazione per il Duale di $L^p(S, \mu)$)**.** *Sia $(S, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio σ-finito, siano $p \in [1, +\infty[$ e q il suo esponente coniugato. Ogni funzionale lineare continuo $T \in (L^p(S, \mu))^*$ è rappresentato da un'unica funzione $f \in L^q(S, \mu)$.*

Osservazione 3.2. La dimostrazione nel caso astratto differisce radicalmente dall'approccio costruttivo impiegato per $\mathbb{R}$. Non avendo a disposizione intervalli su cui definire una funzione accumulatrice $\eta(x)$, si definisce direttamente una misura con segno sui sottoinsiemi misurabili: $\nu(A) = T(\chi_A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. Sfruttando la continuità del funzionale, si dimostra che tale misura ν è assolutamente continua rispetto alla misura di base μ ($\nu \ll \mu$). L'esistenza della funzione integrabile f (che rappresenta la derivata $d\nu/d\mu$) è quindi garantita da un potente risultato di teoria della misura: il **Teorema di Radon-Nikodym**. Una volta ricavata f per le funzioni caratteristiche, l'estensione della rappresentazione a tutto lo spazio $L^p(S, \mu)$ ricalca fedelmente gli argomenti di densità e continuità illustrati nel Passo 4 della dimostrazione precedente.

A Continuità Assoluta

In questa appendice si richiamano brevemente i concetti di base sulla continuità assoluta, necessari per garantire la validità dei passaggi tecnici nella dimostrazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz.

Definizione A.1. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tale che, per qualunque famiglia finita di sottointervalli $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ disgiunti all'interno (ovvero tali che $]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[= \emptyset$ per ogni $i \neq j$), valga la seguente implicazione:

$$\text{se } \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \quad \text{allora } \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Si denota $\mathrm{AC}([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ assolutamente continua}\}$.

Proposizione A.2. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $f \in \mathrm{Lip}([a, b])$, allora $f \in \mathrm{AC}([a, b])$.*

Vale il seguente teorema, che costituisce la prima versione del Teorema Fondamentale del Calcolo per l'integrale di Lebesgue.

Teorema A.3. *Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua, allora essa è derivabile quasi ovunque su (a, b), la sua derivata f' è sommabile, e risulta*

$$\int_a^b f' \, dm = f(b) - f(a).$$

Riferimenti bibliografici

[Bre86] Haim Brezis. *Analisi Funzionale. Teoria e applicazioni* (con un'appendice su Integrazione Astratta di C. Sbordone). Liguori Editore, 1986.

[Mar25] Salvatore Angelo Marano. *Appunti delle lezioni del corso di Real Analysis.* Dipartimento di Matematica e Informatica (DMI), Università degli Studi di Catania, a.a. 2025/2026.

[RF22] Halsey L. Royden, Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis.* Pearson, 5ª Edizione, 2022.